Analyse II, partie 1 – Intégrales eulériennes

Exercice 1. Calculer si possible les limites

$$\lim_{m\to+\infty} \frac{(m!)^{\frac{1}{m}}}{m} \qquad \text{et} \qquad \lim_{m\to+\infty} \left(\frac{\ln(m!)}{m} - \ln(m) \right).$$

Exercice 2 (Définition de Gauss de Γ)**.** Démontrer que pour tout $x > 0$, on a

$$\Gamma(x) = \lim_{m\to+\infty} \frac{m^x\, m!}{x(x+1)\ldots(x+m)}.$$

Exercice 3. Exprimer $\Gamma(2/6)$ et $\Gamma(5/6)$ en fonction de $\Gamma(1/6)$.

Exercice 4. Pour tout $x > 1$, on pose

$$\zeta(x) = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m^x}.$$

Montrer que, pour tout $x > 1$, on a

$$\zeta(x)\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{e^t - 1}\, dt.$$

Exercice 5. Montrer que la mesure d'une boule de $\mathbb{R}^n$ de rayon $r > 0$ est donnée par la formule

$$\omega_n(r) = \frac{\pi^{n/2} r^n}{\Gamma(n/2+1)}.$$

En déduire que $\omega_n(r) \to 0$ si $n \to +\infty$.

Exercice 6 (Formule d'Euler)**.** Soit $\theta \in]0,1[$.

(a) Montrer que

$$B(\theta, 1-\theta) = \int_0^{+\infty} \frac{x^{\theta-1}}{1+x}\, dx.$$

(b) Pour tout $\lambda \in]-\pi, \pi[$, montrer que

$$e^{i\lambda\theta} \int_0^{+\infty} \frac{x^{\theta-1}}{1+e^{i\lambda}x}\, dx = \int_0^{+\infty} \frac{x^{\theta-1}}{1+x}\, dx.$$

(c) Calculer la limite

$$\lim_{\lambda\to\pi^-} \int_0^{+\infty} \frac{\sin(\lambda)\, x^\theta}{x^2 + 2x\cos(\lambda) + 1}\, dx.$$

(d) En déduire la formule d'Euler

$$B(\theta, 1-\theta) = \frac{\pi}{\sin(\pi\theta)}.$$

L. Simons & F. Bastin – 29 septembre 2010.