ANALYSE II – 2ème BMP
Quelques exercices , octobre 2008

Les quelques exercices qui suivent sont tout à fait analogues à ceux proposés et résolus au cours (et aux répétitions).

---

1. Calculer l'aire de la partie du plan dont une description analytique est la suivante
$$\left\{(x,y) : x \in [-1,1], y \in \mathbb{R} \text{ et } \sin^2\left(\frac{\pi x}{4}\right) \leq y \leq \cos^2\left(\frac{\pi x}{4}\right)\right\}.$$
Donner aussi une représentation graphique de cet ensemble.

2. Les fonctions suivantes sont-elles intégrables sur l'intervalle I considéré? Pourquoi?
$$f_1(x) = \frac{1}{\sqrt{x}\,\sqrt{1-x}},\ I =]0,1[; \quad f_2(x) = \frac{1}{x^2}e^{-1/x},\ I =]0,+\infty[.$$

3. Calculer (si possible)
$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+x+1}dx, \quad \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+x-2}dx \quad \int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2+x-2}dx$$

4. Montrer que les fonctions $x \mapsto \ln(\sin x)$ et $x \mapsto \ln(\cos x)$ sont intégrables sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ et que leur intégrale sur cet ensemble [1] vaut $-\frac{\pi}{2}\ln 2$.

5. Montrer que [2]
$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2}dx = 0.$$
Si $a, b > 0$, en déduire que
$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(ax)}{x^2+b^2}dx = \frac{\pi \ln(ab)}{2b}.$$

6. Pour tout $m \in \mathbb{N}_0$ soit la fonction f_m définie par
$$f_m(x) = \frac{1}{1+m^2x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$
a) Etudier la convergence ponctuelle de cette suite sur $\mathbb{R}$.
b) Etudier la convergence uniforme de cette suite sur $\mathbb{R}$, sur $[0,+\infty[$ et sur $[r,+\infty[$ où $r > 0$.
c) Esquisser une représentation graphique de f_1 et de f_2.
d) Pour tout m, déterminer la norme de f_m dans $L^1(\mathbb{R}), L^2(\mathbb{R}), L^\infty(\mathbb{R})$.
e) Etudier la convergence de la suite f_m dans $L^1(\mathbb{R})$.

7. On définit f et g par $f(x) = |x|,\ g(x) = \chi_{[-1,1]}(x)$. Montrer que ces fonctions sont composables; calculer $f * g$ et représenter graphiquement f et $f * g$.

8. (*Splines.*) On pose $f = \chi_{[0,1]}$.
a) Calculer $(f * f)(x),\ x \in \mathbb{R}$, $(f * f * f)(x),\ x \in \mathbb{R}$ et représenter ces fonctions.
b) Pour tout $m \in \mathbb{N}_0$, on pose $B_m(x) = \underbrace{f * \ldots * f}_{m\text{facteurs}}$ (B-spline de degré $m-1$).
Démontrer que
- pour tout m, la restriction de B_m à un intervalle du type $[k, k+1]$ ($k \in \{0,\ldots,m-1\}$) est un polynôme de degré $m-1$,
- pour tout m, la fonction B_m est nulle dans le complémentaire de $[0,m]$,
- pour tout $m \geq 2$, la fonction B_m appartient à $C_{m-2}(\mathbb{R})$,
- pour tout $m \geq 3$, on a $DB_m(x) = B_{m-1}(x) - B_{m-1}(x-1),\ x \in \mathbb{R}$,
- pour tout m, on a $B_m(x) = \frac{x}{m-1}B_{m-1}(x) + \frac{m-x}{m-1}B_{m-1}(x-1),\ x \in \mathbb{R}$; en déduire que $B_m(x) > 0$ pour tout $x \in]0,m[$,
- pour tout m, on a $B_m(x+\frac{m}{2}) = B_m(\frac{m}{2}-x),\ x \in \mathbb{R}$; qu'est-ce que cela implique pour le graphique de B_m?

---

[1]Suggestion. Par changements de variable, on a $I = \int_0^{\pi/2} \ln(\cos x)\ dx = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin x)\ dx = \int_{\pi/2}^{\pi} \ln(\sin x)\ dx$. Alors $2I = \int_0^{\pi/2} \ln(\frac{\sin(2x)}{2})\ dx = -\frac{\pi}{2}\ln 2 + I$.

[2]Suggestion. $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2}dx = -\int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2}dx$