ANALYSE II – 2ème BMP
Liste d'exercices 1
Septembre-octobre 2009

1. Calculer l'aire de la partie du plan dont une description analytique est la suivante

$$\left\{(x,y) : x \in [-1,1], y \in \mathbb{R} \text{ et } 2\sin^2\left(\frac{\pi x}{4}\right) \leq y \leq 2\cos^2\left(\frac{\pi x}{4}\right)\right\}.$$

Donner aussi une représentation graphique de cet ensemble.

2. Les fonctions suivantes sont-elles intégrables sur l'intervalle I considéré? Pourquoi?

$$f_1(x) = \frac{1}{\sqrt{x}\,\sqrt{1-x}},\ I =]0,1[; \quad f_2(x) = \frac{1}{x^2}e^{-1/x},\ I =]0,+\infty[.$$

3. Calculer (si possible)

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+x+1}dx, \quad \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+x-2}dx \quad \int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2+x-2}dx$$

4. Montrer que les fonctions $x \mapsto \ln(\sin x)$ et $x \mapsto \ln(\cos x)$ sont intégrables sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ et que leur intégrale sur cet ensemble [1] vaut $-\frac{\pi}{2}\ln 2$.

5. Montrer que [2]

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2}dx = 0.$$

Si $a, b > 0$, en déduire que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(ax)}{x^2+b^2}dx = \frac{\pi\ln(ab)}{2b}.$$

6. a) Soit $A =]0,+\infty[\times]0,+\infty[$. Montrer que la fonction f définie par

$$f(x,y) = \frac{1}{(1+y)\,(1+yx^2}$$

est intégrable sur A et calculer son intégrale.

b) En déduire que la fonction $x \mapsto \dfrac{\ln x}{x^2-1}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ et la valeur de son intégrale.

7. Si $a, b > 0$ déterminer

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}dx.$$

8. *Intégrales eulériennes.* Exercices 3.5 et 3.6 du cahier d'exercices.

[1] Suggestion. Par changements de variable, on a $I = \int_0^{\pi/2}\ln(\cos x)\ dx = \int_0^{\pi/2}\ln(\sin x)\ dx = \int_{\pi/2}^{\pi}\ln(\sin x)\ dx$. Alors $2I = \int_0^{\pi/2}\ln(\frac{\sin(2x)}{2})\ dx = -\frac{\pi}{2}\ln 2 + I$.

[2] Suggestion. $\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{1+x^2}dx = -\int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2}dx$