

2ème année de bachelier en sciences physiques
ANALYSE II, 2011-2012
Intégrales curvilignes, fonctions holomorphes, formule intégrale de Cauchy
et développement en séries de puissances

Exercice 1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Déterminer les parties réelle et imaginaire des nombres complexes suivants :

$$\frac{1}{i^3}, \quad \frac{1}{\cos(\alpha) + i \sin(\alpha)}, \quad e^{i(\alpha+1/2)}, \quad \frac{1}{1+i\alpha}, \quad \cos\left(\frac{\pi}{6} + i\frac{\pi}{3}\right)$$

Exercice 2. Résoudre les équations suivantes ($z \in \mathbb{C}$) :

$$z^2 - i = 0, \quad z^3 - 1 = 0, \quad z^2 + 9 = 0, \quad z^2 + z + 1 = 0, \quad z^4 + 1 = 0$$

Exercice 3. Déterminer les racines quatrièmes de $16i$ et en donner une représentation géométrique.

Exercice 4. Déterminer le module et la valeur principale (c'est-à-dire dans $] -\pi, \pi]$) de l'argument des complexes suivants et en donner une représentation géométrique :

$$e^i, \quad (1+i)^{12}, \quad -2+2i, \quad 5i.$$

Exercice 5. a) Déterminer un paramétrage injectif de la circonférence centrée en i et de rayon 2.

b) Déterminer un paramétrage injectif du carré centré en l'origine, de côtés parallèles aux axes et de longueur de côté égale 1.

Exercice 6. a) On considère le paramétrage $\gamma(t) = 1-2t, t \in [-1, 1]$. Calculer $\int_{\gamma} x^2 dx$.

b) On considère le paramétrage de l'arcade de cycloïde $\gamma(t) = (t - \sin(t), 1 - \cos(t))$, $t \in [0, 2\pi]$. Représenter la courbe déterminée par ce paramétrage et calculer si possible $\int_{\gamma} f_1 dx + f_2 dy$ avec $\vec{f}(x, y) = [x, -y]$.

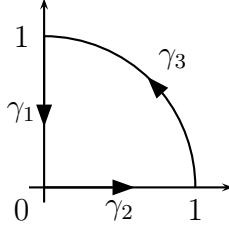
c) On considère un paramétrage γ injectif et régulier du segment d'origine $(0, 0, 0)$ et d'extrémité $(1, 1, 0)$. Calculer si possible l'intégrale $\int_{\gamma} f_1 dx + f_2 dy + f_3 dz$ avec $\vec{f}(x, y, z) = [x, -z, 2y]$.

Exercice 7. On considère un paramétrage γ injectif et régulier de la circonférence centrée en l'origine et de rayon $r > 0$. Calculer si possible $\int_{\gamma} f(z) dz$ avec $f(z) = z^2$, $f(z) = e^z$, $f(z) = \bar{z}$, $f(z) = \Im z$ et $f(z) = 1/z^2$.

Exercice 8. On considère la fonction $f(z) = |z|$. Calculer si possible

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz + \int_{\gamma_3} f(z)dz$$

pour les courbes paramétrées de manière injective et régulière par



Exercice 9. La fonction $z \in \mathbb{C} \mapsto \sin(z)$ est-elle bornée ? Justifiez.

Exercice 10. Soit la proposition suivante : "la fonction $z \in \mathbb{C} \mapsto e^{-z^2}$ tend vers 0 à l'infini." Cette proposition est-elle vraie ? Fausse ? Justifiez.

Exercice 11. Soit γ le bord du carré centré en l'origine, de longueur de côté égale à 2. On considère qu'on parcourt ce bord "à gauche" et qu'on utilise un paramétrage injectif. Déterminer la valeur des intégrales suivantes :

$$\int_{\gamma} \Re z \, dz, \quad \int_{\gamma} \Im z \, dz, \quad \int_{\gamma} \frac{1}{z} \, dz.$$

Exercice 12. Où les fonctions suivantes sont-elles holomorphes ? Quels sont leurs zéros et leurs multiplicités respectives ?

$$\begin{aligned} f_1(z) &= e^z, & f_2(z) &= 3z^2 - z + 1, & f_3(z) &= e^{1/z}, \\ f_4(z) &= \frac{1}{\sin(z)}, & f_5(z) &= \frac{1}{z^4+1}, & f_6(z) &= \frac{1}{e^z-1}, \\ f_7(z) &= \frac{1}{e^{iz}+i}, & f_8(z) &= \frac{1}{(z^2+z+1)^2}, & f_9(z) &= ze^{1/z}. \end{aligned}$$

Exercice 13. Déterminer $\text{Ln}(z)$ pour les complexes z suivants :

$$-10, \quad 2 - 2i, \quad i, \quad -i, \quad e^{-i}.$$

Déterminer les parties réelle et imaginaire des complexes suivants :

$$(-i)^i, \quad (-1)^{1+i}.$$

Exercice 14. Déterminer où les fonctions suivantes sont holomorphes :

$$f_1(z) = \text{Ln}(1+z), \quad f_2(z) = \frac{\text{Ln}(z)}{z^3+1}, \quad f_3(z) = \frac{z^{\frac{1}{2}}}{z-i}.$$

Exercice 15. On considère un paramétrage γ injectif et régulier de la circonférence centrée en l'origine et de rayon unitaire, orienté dans le sens "aire gauche". Calculer

$$\text{a) } \int_{\gamma} e^{z^2} dz, \quad \text{b) } \int_{\gamma} \frac{1}{z-2} dz, \quad \text{c) } \int_{\gamma} \frac{1}{z-\frac{1}{2}} dz, \quad \text{d) } \int_{\gamma} \frac{1}{z-\frac{i}{2}} dz, \quad \text{e) } \int_{\gamma} \frac{\sin(z)}{(z-\frac{1}{2})^2} dz.$$

Exercice 16. Calculer si possible $\int_{\gamma} \frac{z^2 - 4}{z^2 + 4} dz$ où γ est un paramétrage orienté dans le sens "aire gauche", injectif et régulier de la circonférence :

1. centrée en i et de rayon 2 ;
2. centrée en 1 et de rayon 2 ;
3. centrée en $-3i$ et de rayon 2 ;
4. centrée en 0 et de rayon $\frac{\pi}{2}$.

Exercice 17. Développer les fonctions suivantes en série de puissances de $(z - z_0)$ et préciser l'ensemble dans lequel le développement a lieu.

$$\text{a) } e^{-2z}, z_0 = 0; \quad \text{b) } e^z, z_0 = -2i; \quad \text{c) } \frac{1}{z^2+1}, z_0 = 0; \quad \text{d) } \frac{1}{z}, z_0 = 1;$$

$$\text{e) } \sin(z), z_0 = 0; \quad \text{f) } \cos(z), z_0 = 0; \quad \text{g) } \sin(z), z_0 = \pi/2; \quad \text{h) } \frac{z}{z^2-1}, z_0 = 0.$$