Analyse II, partie 2

Année académique 2012-2013
2^{e} Bac Physique

1. Intégrales curvilignes et fonctions holomorphes

Exercice 1. (a) Calculer le logarithme principal des nombres complexes suivants : -10, $2-2i$, i et e^{-i}. Même question en considérant le logarithme $\ln_0$ (i.e. le logarithme où l'argument est pris dans $[0, 2\pi[$).

(b) Déterminer les parties réelle et imaginaire des nombres complexes suivants : $(-i)^i$ et $(-1)^{i+1}$.

(c) Est-il possible de calculer $\ln((1+i)^i)$? Pourquoi ? En cas de réponse affirmative, calculer ce nombre complexe.

Exercice 2. Déterminer le domaine d'holomorphie des fonctions suivantes (données sous forme explicite) :

(a) $f_1(z) = e^z$ (b) $f_2(z) = e^{1/z}$ (c) $f_3(z) = \dfrac{1}{z^4+1}$

(d) $f_4(z) = \dfrac{1}{\sin(z)}$ (e) $f_5(z) = \ln_0(1+z)$ (f) $f_6(z) = \dfrac{\ln(z)}{z^3+1}$

(g) $f_7(z) = \dfrac{1}{(z^2+z+1)^2}$ (h) $f_8(z) = \dfrac{z^{1/2}}{z-i}$ (i) $f_9(z) = \dfrac{\mathrm{sh}(z)}{e^z-1}$

Exercice 3. (a) Si γ est un chemin simple régulier qui décrit le cercle centré en l'origine et de rayon 1, calculer la valeur des intégrales curivilignes suivantes :

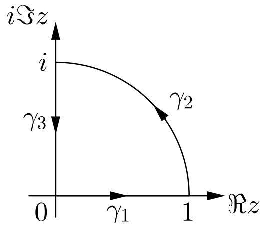
(1) $\displaystyle\int_\gamma \Re z\, dz$ (2) $\displaystyle\int_\gamma e^{z^2}\, dz$ (3) $\displaystyle\int_\gamma \frac{dz}{z-2}$

(4) $\displaystyle\int_\gamma \frac{dz}{z-\frac{1}{2}}$ (5) $\displaystyle\int_\gamma \frac{\sin(z)}{2z-i}\, dz$ (6) $\displaystyle\int_\gamma \frac{\sin(z)}{\left(z-\frac{1}{2}\right)^2}\, dz$

(b) Calculer la valeur de l'intégrale curviligne

$$\int_\gamma |z|\, dz$$

si γ est la juxtaposition des chemins γ_1, γ_2 et γ_3 de classe C_1 représentant les courbes données par le graphique ci-contre.



(c) Intégrer la fonction f (d'une variable complexe) définie par

$$f(z) = \frac{z^2-4}{z^2+4}$$

sur chacune des circonférences définies ci-dessous (on supposera que ces circonférences sont parcourues dans le sens trigonométrique) :

$$\mathcal{C}_1 \equiv |z-i| = 2, \qquad \mathcal{C}_2 \equiv |z-1| = 2 \qquad \text{et} \qquad \mathcal{C}_3 \equiv |z| = 3.$$

(d) Soit γ un chemin régulier par morceaux, injectif, orienté « aire à gauche » et qui paramétrise le bord du carré de sommets 0, 3, $3+3i$ et $3i$. Calculer la valeur des intégrales curvilignes

$$\int_\gamma \frac{dz}{z+1+i}, \qquad \int_\gamma \frac{dz}{z-1-i} \qquad \text{et} \qquad \int_\gamma \overline{z}\, dz.$$

Exercice 4. Soit $a > 1$. En utilisant la technique des fonctions holomorphes, calculer si possible la valeur de l'intégrale
$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{a + \cos(x)}.$$

Exercice 5. (a) La fonction sin est-elle bornée sur $\mathbb{C}$? Justifier.

(b) L'affirmation « La fonction $z \mapsto e^{-z^2}$ définie sur $\mathbb{C}$ tend vers 0 à l'infini » est-elle vraie ou fausse ? Justifier.

(c) Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ symétrique par rapport à l'axe des parties réelles (i.e. $z \in \Omega \Rightarrow \overline{z} \in \Omega$) et soit $f \in \mathcal{O}(\Omega)$. La fonction $z \mapsto \overline{f(\overline{z})}$ est-elle holomorphe sur Ω ? Justifier.

L. Simons & F. Bastin – 4 mars 2013