

2ème année de bachelier en sciences physiques
ANALYSE II
Intégrales eulériennes

Exercice 1. Si $a, b > 0$, calculer

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx.$$

Exercice 2. Calculer les limites suivantes :

a) $\lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{(m!)^{1/m}}{m},$
b) $\lim_{m \rightarrow +\infty} (m!)^{\frac{1}{m \ln(m)}}.$

Exercice 3. Établir que pour tout $m > 0, n > -1, a > 0$, on a

$$\int_0^{+\infty} e^{-ax^m} x^n dx = \frac{1}{m} \Gamma\left(\frac{n+1}{m}\right) a^{-\left(\frac{n+1}{m}\right)}.$$

Exercice 4. Exprimer $\Gamma(2/6)$ et $\Gamma(5/6)$ en fonction de $\Gamma(1/6)$.

Exercice 5. Montrer que la mesure d'une boule de $\mathbb{R}^n$ est donnée par la formule

$$\omega_n(r) := \text{mes}(\{x \in \mathbb{R}^n : |x| < r\}) = \frac{\pi^{n/2} r^n}{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)} \quad \text{pour } r > 0.$$

En déduire que $\omega_n(r) \rightarrow 0$ si $n \rightarrow +\infty$.