Répétition du cours d'Analyse II
2ème BP
12 Février 2010

1. Déterminer le développement en série trigonométrique de Fourier dans $L^2[-\pi, \pi]$ de la fonction $f(x) = x$, $x \in [-\pi, \pi]$; exprimer le résultat en utilisant uniquement des fonctions sin et cos. Déduire des calculs précédents que
$$\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

2. On se place dans $L^2([0, \pi])$.
   (a) Déterminer le développement en série trigonométrique de Fourier de $f(x) = \sin(x)$ en simplifiant la réponse au maximum ; la réponse finale ne doit comporter que des fonctions sinus et cosinus.
   (b) En déduire l'égalité suivante
$$\frac{\pi}{2} = 1 - 2\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{4m^2 - 1}.$$

3. Déterminer la partie réelle et imaginaire des complexes suivants (où $\alpha \in \mathbb{R}$) :
$$\frac{1+2i}{1-2i}, \qquad \frac{1}{\overline{2i^3 - 1}}, \qquad \frac{1}{\sin(\alpha) + i\cos(\alpha)}.$$

4. Déterminer le module et la valeur principale (c'est-à-dire dans $]-\pi, \pi]$) de l'argument des complexes suivants et en donner une représentation géométrique :
$$e^i, \qquad (1+i)^{12}, \qquad -2+2i, \qquad 5i.$$

5. Résoudre les équations suivantes (où z est une variable complexe)
$$z^2 + 1 = 0, \quad z^4 - 16 = 0, \quad z^4 + 16 = 0, \quad z^2 + z + 1 = 0, \quad z^3 - 1 = 0, \quad z^2 - i = 0.$$

6. a) Déterminer un paramétrage injectif de la circonférence centrée en i et de rayon 2.
   b) Déterminer un paramétrage injectif du carré centré à l'origine, de côtés parallèles aux axes et de longueur de côté égale à 1.