2ème année de bachelier en sciences physiques
ANALYSE II, 2010-2011
Intégrales curvilignes, fonctions holomorphes, formule intégrale de Cauchy et développement en séries de puissances

---

Exercice 1. Déterminer le module et la valeur principale (c'est-à-dire dans $]-\pi,\pi]$) de l'argument des complexes suivants et en donner une représentation géométrique :

$$e^i, \qquad (1+i)^{12}, \qquad -2+2i, \qquad 5i.$$

Exercice 2. a) Déterminer un paramétrage injectif de la circonférence centrée en i et de rayon 2.

b) Déterminer un paramétrage injectif du carré centré en l'origine, de côtés parallèles aux axes et de longueur de côté égale à 1.

Exercice 3. a) On considère le paramétrage $\gamma(t) = 1-2t$, $t \in [-1,1]$. Calculer $\int_\gamma x^2 dx$.

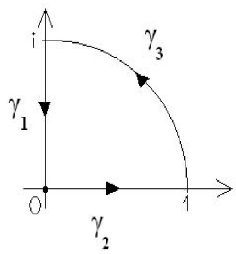
b) On considère le paramétrage de l'arcade de cycloïde $\gamma(t) = (t-\sin(t), 1-\cos(t))$, $t \in [0, 2\pi]$. Représenter la courbe déterminée par ce paramétrage et calculer si possible $\int_\gamma f_1 dx + f_2 dy$ avec $\vec{f}(x,y) = [x, -y]$.

c) On considère un paramétrage γ injectif et régulier du segment d'origine $(0,0,0)$ et d'extrémité $(1,1,0)$. Calculer si possible l'intégrale $\int_\gamma f_1 dx + f_2 dy + f_3 dz$ avec $\vec{f}(x,y,z) = [x, -z, 2y]$.

Exercice 4. On considère la fonction $f(z) = |z|$. Calculer si possible

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz + \int_{\gamma_3} f(z)dz$$

pour les courbes paramétrées de manière injective et régulière par



Exercice 5. On considère un paramétrage γ injectif et régulier de la circonférence centrée en l'origine et de rayon $r > 0$. Calculer si possible $\int_\gamma f(z)dz$ avec $f(z) = z$, $f(z) = \overline{z}$, $f(z) = \Re z$, $f(z) = 1/z$ et $f(z) = 1/z^2$.

Exercice 6. Soit γ le bord du carré centré en l'origine, de longueur de côté égale à 2. On considère qu'on parcourt ce bord "aire à gauche" et qu'on utilise un paramétrage injectif. Déterminer la valeur des intégrales suivantes :

$$\int_\gamma \Re z \ dz, \qquad \int_\gamma \Im z \ dz, \qquad \int_\gamma \frac{1}{z} \ dz.$$

Exercice 7. Où les fonctions suivantes sont-elles holomorphes ?

$$f_1(z) = e^z, \qquad f_2(z) = 3z^2 - z + 1, \qquad f_3(z) = e^{1/z}, \qquad f_4(z) = \frac{1}{\sin(z)},$$
$$f_5(z) = \frac{1}{z^4+1}, \qquad f_6(z) = \frac{1}{e^z - 1}, \qquad f_7(z) = \frac{1}{e^{iz}+i}, \qquad f_8(z) = \frac{1}{(z^2+z+1)^2}.$$

Exercice 8. Déterminer $\mathrm{Ln}(z)$ pour les complexes z suivants :

$$-10, \quad 2-2i, \quad i, \quad -i, \quad e^{-i}.$$

Déterminer les parties réelle et imaginaire des complexes suivants :

$$(-i)^i, \quad (-1)^{1+i}.$$

Exercice 9. Déterminer où les fonctions suivantes sont holomorphes :

$$f_1(z) = \mathrm{Ln}(1+z), \quad f_2(z) = \frac{\mathrm{Ln}(z)}{z^3+1}, \quad f_3(z) = \frac{z^{\frac{1}{2}}}{z-i}.$$

Exercice 10. On considère un paramétrage γ injectif et régulier de la circonférence centrée en l'origine et de rayon unitaire, orienté dans le sens "aire à gauche". Calculer

$$\text{a)} \int_\gamma e^{z^2} dz, \quad \text{b)} \int_\gamma \frac{1}{z-2} dz, \quad \text{c)} \int_\gamma \frac{1}{z-\frac{1}{2}} dz, \quad \text{d)} \int_\gamma \frac{1}{z-\frac{i}{2}} dz, \quad \text{e)} \int_\gamma \frac{\sin(z)}{(z-\frac{1}{2})^2} dz.$$

Exercice 11. Calculer si possible $\displaystyle\int_\gamma \frac{z^2-4}{z^2+4} \ dz$ où γ est un paramétrage orienté dans le sens "aire à gauche", injectif et régulier de la circonférence :

1. centrée en i et de rayon 2 ;
2. centrée en 1 et de rayon 2 ;
3. centrée en $-3i$ et de rayon 2 ;
4. centrée en 0 et de rayon $\frac{\pi}{2}$.

Exercice 12. Développer les fonctions suivantes en série de puissances de $(z - z_0)$ et préciser l'ensemble dans lequel le développement a lieu.

$$\text{a)} e^{-2z}, z_0 = 0; \quad \text{b)} e^z, z_0 = -2i; \quad \text{c)} \frac{1}{z^2+1}, z_0 = 0; \quad \text{d)} \frac{1}{z}, z_0 = 1; \quad \text{e)} \sin(z), z_0 = 0;$$
$$\text{f)} \cos(z), z_0 = 0; \quad \text{g)} \sin(z), z_0 = \pi/2; \quad \text{h)} \frac{z}{z^2-1}, z_0 = 0.$$