ANALYSE II – 2ème BMP

Quelques exercices, liste 2, octobre-novembre 2008

La plupart des exercices qui suivent sont tout à fait directs et analogues à ceux proposés et résolus au cours et aux répétitions. Certains d'entre eux, suggérés par des parties de matière du cours, demandent un peu plus de réflexion.

---

1. Montrer que, pour tout naturel strictement positif m, on a

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2m+1)x}{\sin x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

Sachant que la limite existe, en déduire que

$$\lim_{r\to+\infty} \int_0^r \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

2. La constante d'Euler γ.
a) Montrer que la suite

$$x_m = \sum_{k=1}^m \frac{1}{k} - \ln(m),\ m \in \mathbb{N}_0$$

converge. Sa limite est appelée la constante d'Euler et est notée γ ($\gamma \simeq 0.577$).
b) Montrer que

$$-\gamma = D\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} \left(e^{-x} - \frac{1}{1+x}\right) \frac{1}{x}\ dx = \int_0^{\to+\infty} \left(\frac{1}{1+x^2} - \cos x\right) \frac{1}{x}\ dx$$

3. On pose

$$f(x) = \frac{\ln^2(1-x)}{x}.$$

- Montrer que f est intégrable sur $]0,1[$.
- En physique, l'intégrale $\int_0^1 f(x)dx$ est un terme correctif dans l'expression du moment magnétique de l'électron. Montrer que cette intégrale est égale à $2\zeta(3)$ où ζ est la fonction de Riemman

$$\zeta(s) = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m^s}.$$

4. Déterminer (si possible) le produit de composition des fonctions f et g suivantes

$$f(x) = e^x \chi_{[0,+\infty[}(x) \quad g(x) = x$$

Même question pour $f(x) = e^{-|x|},\ g = f$ et pour $f(x) = \sin x,\ g(x) = \chi_{[0,\frac{\pi}{2}]}$.

5. Si possible, déterminer le produit de composition des fonctions f et g suivantes

$$f(x) = |x|,\ x \in \mathbb{R} \quad g(x) = \frac{1}{(1+x^2)^2},\ x \in \mathbb{R}.$$

6. Posons

$$e_n(x) = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \chi_{]0,+\infty[}(x), \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Montrer que

$$D^n(e_m * f) = e_{m-n} * f, \quad D^k(e_k * f) = f$$

pour tous naturels strictement positifs m, n, k tels que $m > n$ et toute fonction f indéfiniment continûment dérivable à support compact dans $\mathbb{R}$.

7. Quand il est question de transformation de Fourier (et de représentations de la distribution de Dirac), d'analyse du signal (théorème de Shannon), les expressions

$$\frac{\sin(nt)}{\pi t},\ t \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}_0 \qquad \text{(parfois notées } \delta_n(t))$$

ont une importance considérable. Montrer que

$$\delta_n(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-n}^{n} e^{ist}\ ds,\ t \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}_0$$

et que

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \delta_n(x-t)f(t)\ dt\ = (\delta_n * f)(x) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

pour tout $f \in C_1(\mathbb{R})$ à support compact.

8. a) Dans chacun des cas suivants, examiner la convergence ponctuelle et uniforme des suites[1] δ_n ($n \in \mathbb{N}_0$).
b) Esquisser la représentation graphique de δ_n (pour quelques valeurs de n).
c) Les fonctions δ_n sont-elles dans $L^1(\mathbb{R}), L^2(\mathbb{R}), L^\infty(\mathbb{R})$? Si c'est le cas, examiner la convergence des suites dans les espaces auxquels les fonctions appartiennent.
d) Montrer que[2]

$$\int_{\mathbb{R}} \delta_n(x)\ dx = 1,\ \forall n, \qquad \lim_{n\to+\infty}\int_{\mathbb{R}} \delta_n(x)f(x)\ dx\ =\ f(0), \forall f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

$$(1)\delta_n = n\chi_{[-1/(2n),1/(2n)]}, \quad (2)\delta_n(x) = \frac{n}{\sqrt{\pi}}\exp(-n^2x^2)$$

$$(3)\delta_n = \frac{n}{\pi(1+n^2x^2)}, \quad (4)\delta_n(x) = \frac{1}{2\pi}\frac{\sin((n+1/2)x)}{\sin(x/2)}\chi_{[-\pi,\pi]}(x).$$

9. Dans $\mathbb{R}^2$, déterminer la transformée de Fourier (-) du Laplacien d'une fonction f (en supposant l'intégrabilité)

10. Soit un signal f (on suppose que cette fonction est intégrable et de carré intégrable). On définit *l'autocorrélation* du signal par

$$E_f(t) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{f(x-t)}\ dx, \qquad t \in \mathbb{R}$$

et la *densité spectrale de puissance* de ce signal (PSD) par

$$D_f(y) = \left|\widehat{f}(y)\right|^2, \qquad y \in \mathbb{R}$$

où $\widehat{f}(y)$ désigne la transformée de Fourier négative de f en y. On pose $f^s(x) = \overline{f(-x)},\ x \in \mathbb{R}$.

- Montrer que l'autocorrélation s'écrit

$$E_f = f * f^s$$

- Montrer que l'autocorrélation d'une fonction à valeurs réelles est une fonction paire
- Montrer que

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} |E_f(t)| = E_f(0).$$

- Montrer qu'à une constante multiplicative près, la densité spectrale et l'autocorrélation sont les transformées de Fourier l'une de l'autre.

FB, October 17, 2008

[1](2) est très lié aux fonctions d'Hermite, voir suite du cours; (4) s'appelle le noyau de de Dirichlet et intervient dans l'étude des séries trigonométriques de Fourier; voir aussi suite du cours

[2]La notation $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des fonctions indéfiniment continûment dérivables sur $\mathbb{R}$ dont le support est compact.