

2ème année de bachelier en sciences physiques
ANALYSE II, 2011-2012
Singularités des fonctions holomorphes

Exercice 1. Déterminer où les fonctions suivantes sont holomorphes. Quelles sont les singularités isolées et de quel type sont-elles ?

$$\begin{aligned} f_1(z) &= \operatorname{Ln}(1+z) & f_2(z) &= \frac{1}{(z^2+z+1)^2} & f_3(z) &= \frac{z^{\frac{1}{2}}}{z-i} \\ f_4(z) &= e^{1/z} & f_5(z) &= \frac{1}{\sin(1/z)} & f_6(z) &= \frac{\sin(z)}{\sinh(z)} \\ f_7(z) &= \frac{1}{e^{iz}+i} & f_8(z) &= \frac{\operatorname{Ln}(z)}{z^3+1} & f_9(z) &= \frac{\sin(z)}{z(z^2+1)} \end{aligned}$$

Exercice 2. Calculer le résidu en chacune des singularités isolées des fonctions suivantes.

$$f_1(z) = \frac{1}{z^4 + 2z^2 + 1} \quad f_2(z) = e^{z+1/z} \quad f_3(z) = \frac{1}{z^6 + 1}$$

Exercice 3. Si elles existent, calculer les intégrales suivantes. On pose $\gamma(t) = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$.

$$\begin{aligned} (a) \int_0^{2\pi} \frac{1}{5-4\sin(x)} dx & \quad (b) \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(x^2-2x+5)^2} dx \\ (c) \int_{\gamma} e^{1/z} dz & \quad (d) \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^6} dx \end{aligned}$$

Exercice 4. Développer les fonctions suivantes en série de puissances de $(z - z_0)$ et préciser l'ensemble dans lequel le développement a lieu. Préciser également les fonctions h et H dans le développement de Laurent.

$$\begin{aligned} \text{a) } e^{-2z}, z_0 = 0; & \quad \text{b) } e^z, z_0 = -2i; & \text{c) } \frac{1}{z^2+1}, z_0 = 0; & \quad \text{d) } \frac{1}{z}, z_0 = 1; \\ \text{e) } \sin(z), z_0 = 0; & \quad \text{f) } \cos(z), z_0 = 0; & \text{g) } \sin(z), z_0 = \pi/2; & \quad \text{h) } \frac{z}{z^2-1}, z_0 = 0. \end{aligned}$$