Analyse II, partie 2

Année académique 2012-2013
2e Bac Physique

2. Singularités isolées, séries de Laurent et résidus

Exercice 1. Développer les fonctions suivantes (données sous forme explicite) en série de puissances au point z_0 donné et préciser l'ensemble dans lequel le développement a lieu :

(a) $f_1(z) = \dfrac{1}{z^2+1}$, $z_0 = 0$

(b) $f_2(z) = \dfrac{1}{z}$, $z_0 = 1$

(c) $f_3(z) = \dfrac{z}{z^2-1}$, $z_0 = 0$

(d) $f_4(z) = \dfrac{z}{(z-1)(z-2)}$, $z_0 = 0$

(e) $f_5(z) = \dfrac{1}{1+z+z^2}$, $z_0 = 0$

(f) $f_6(z) = \dfrac{\sin(z)}{z}$, $z_0 = 0$

(g) $f_7(z) = \dfrac{1-\cos(z)}{z^2}$, $z_0 = 0$

(h) $f_8(z) = \dfrac{e^z}{1-z}$, $z_0 = 0$

Exercice 2. Où les fonctions S et F définies par

$$S(z) = \sum_{m=1}^{+\infty} m^2 z^m \qquad \text{et} \qquad F(z) = \frac{z+z^2}{(1-z)^3}.$$

sont-elles holomorphes ? Où sont-elles égales ? En déduire la somme de la série $\displaystyle\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{m^2}{2^m}$.

Exercice 3. Développer les fonctions suivantes (données sous forme explicite) en série de Laurent en la singularité isolée z_0 donnée et préciser l'ensemble dans lequel le développement a lieu :

$$f_1(z) = \frac{1}{z^4-z^5},\ z_0 = 0, \qquad f_2(z) = z\cos\left(\frac{1}{z}\right),\ z_0 = 0, \qquad \text{et} \qquad f_3(z) = \frac{z^2-4}{z-1},\ z_0 = 1.$$

Exercice 4. Où les fonctions suivantes (données sous forme explicite) sont-elles holomorphes ? Quelles sont leurs singularités isolées ? De quels types sont-elles ? Déterminer le résidu des fonctions en chacune de leurs singularités isolées :

(a) $f_1(z) = \dfrac{1}{z^4+2z^2+1}$

(b) $f_2(z) = \dfrac{\sin(z) - z + \frac{z^3}{6}}{z^7}$

(c) $f_3(z) = \sin\left(\dfrac{1}{z}\right)$

(d) $f_4(z) = \dfrac{1}{\sin\left(\frac{1}{z}\right)}$

(e) $f_5(z) = \mathrm{tg}(z)$

(f) $f_6(z) = \dfrac{\ln(z+1)}{z}$

(g) $f_7(z) = \dfrac{e^{1/z}}{1-z}$

(h) $f_8(z) = \dfrac{\mathrm{sh}(z)}{z^2}$

Exercice 5. Soit z_0 une singularité isolée de la fonction f.

(a) Si z_0 est un pôle d'ordre $p \in \mathbb{N}_0$ de f, quel est le type de singularité de z_0 pour Df ? Même question si z_0 est une singularité essentielle de f.

(b) Calculer le résidu de Df en z_0.

Exercice 6. Calculer si possible la valeur de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^6}.$$

L. Simons & F. Bastin – 4 mars 2013