Année académique 2013-2014
2e Bac Physique

2. Singularités isolées, séries de Laurent et résidus

Exercice 1. Développer les fonctions suivantes (données sous forme explicite) en série de puissances au point z_0 donné et préciser l'ensemble dans lequel le développement a lieu :

(a) $f_1(z) = \dfrac{1}{z^2+1}$, $z_0 = 0$ (b) $f_2(z) = \dfrac{1}{z}$, $z_0 = 1$

(c) $f_3(z) = \dfrac{z}{(z-1)(z-2)}$, $z_0 = 0$ (d) $f_4(z) = \dfrac{1}{1+z+z^2}$, $z_0 = 0$

(e) $f_5(z) = \dfrac{1-\cos(z)}{z^2}$, $z_0 = 0$ (f) $f_6(z) = \dfrac{e^z}{1-z}$, $z_0 = 0$

Exercice 2. Où les fonctions S et F (d'une variable complexe) définies par

$$S(z) = \sum_{m=1}^{+\infty} m^2 z^m \qquad \text{et} \qquad F(z) = \frac{z+z^2}{(1-z)^3}$$

sont-elles holomorphes ? Où sont-elles égales ? En déduire la somme de la série $\displaystyle\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{m^2}{2^m}$.

Exercice 3. Développer les fonctions suivantes (données sous forme explicite) en série de Laurent en la singularité isolée z_0 donnée et préciser l'ensemble dans lequel le développement a lieu :

$$f_1(z) = \frac{1}{z^4 - z^5},\ z_0 = 0, \qquad f_2(z) = z\cos\left(\frac{1}{z}\right),\ z_0 = 0, \qquad \text{et} \qquad f_3(z) = \frac{z^2-4}{z-1},\ z_0 = 1.$$

Exercice 4. Où les fonctions suivantes (données sous forme explicite) sont-elles holomorphes ? Quelles sont leurs singularités isolées ? De quels types sont-elles ? Déterminer le résidu des fonctions en chacune de leurs singularités isolées :

$$\text{(a) } f_1(z) = \frac{1}{z^4+2z^2+1} \qquad \text{(b) } f_2(z) = \frac{\sin(z) - z + \frac{z^3}{6}}{z^7} \qquad \text{(c) } f_3(z) = \sin\left(\frac{1}{z}\right)$$

$$\text{(d) } f_4(z) = \frac{1}{\sin\left(\frac{1}{z}\right)} \qquad \text{(e) } f_5(z) = \frac{\ln(z+1)}{z} \qquad \text{(f) } f_6(z) = \frac{e^{1/z}}{1-z} \qquad \text{(e) } f_7(z) = \frac{\mathrm{sh}(z)}{z^2}$$

Exercice 5. Soit z_0 une singularité isolée de la fonction f.

(a) Si z_0 est un pôle d'ordre $p \in \mathbb{N}_0$ de f, quel est le type de singularité de z_0 pour Df ? Même question si z_0 est une singularité essentielle de f.

(b) Calculer le résidu de Df en z_0.

Exercice 6. On pose $\gamma(t) = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$. Calculer si possible la valeur des intégrales curvilignes

$$\int_\gamma \frac{\sin(z)}{z\,\mathrm{sh}(z)}\,dz \qquad \text{et} \qquad \int_\gamma \frac{\sin(z) - \mathrm{sh}(z)}{z^8}\,dz.$$

Exercice 7. Calculer si possible la valeur des intégrales

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^6} \qquad \text{et} \qquad \int_0^{+\infty} \frac{x^{a-1}}{x+1}\,dx$$

(pour des valeurs adéquates du paramètre réel a pour la dernière intégrale).

L. Simons & F. Bastin – 11 février 2014