

ANALYSE II – 2BM, ANNÉE ACADÉMIQUE 2009-2010

Liste d'exercices 2

Octobre 2009

1. Pour tout $m \in \mathbb{N}_0$, on pose

$$f_m(x) = m^2 x^2 e^{-mx}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Etudier la convergence ponctuelle et la convergence uniforme de la suite f_m ($m \in \mathbb{N}_0$) sur $[0, +\infty[$, sur $[r, +\infty[$ ($r > 0$) et sur les compacts de $]0, +\infty[$.

2. Pour tout $m \in \mathbb{N}_0$, posons

$$f_m(x) = \frac{1}{m} \chi_{[-m, m]}(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

(a) Pour tout $m \in \mathbb{N}_0$, déterminer à quels espaces $L^1(\mathbb{R})$, $L^2(\mathbb{R})$, $L^\infty(\mathbb{R})$ appartient la fonction f_m et en calculer les normes correspondantes.

(b) Etudier la convergence ponctuelle de la suite f_m ($m \in \mathbb{N}_0$).

(c) Etudier la convergence de la suite f_m ($m \in \mathbb{N}_0$) dans chacun des espaces $L^1(\mathbb{R})$, $L^2(\mathbb{R})$, $L^\infty(\mathbb{R})$.

3. Pour tout $m \in \mathbb{N}_0$, on pose

$$f_m(x) = \frac{x^m}{m}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

et on définit la série

$$\sum_{m=1}^{+\infty} f_m.$$

(a) Sur quel intervalle I de $\mathbb{R}$ (intervalle le plus grand possible) la série converge-t-elle ?

(b) Etudier la convergence uniforme de cette série sur I et sur ses sous-intervalles.

(c) Déterminer la norme de f_m dans $L^1([-1, 1])$, $L^2([-1, 1])$ et $L^\infty([-1, 1])$.

(d) Etudier la convergence de la série dans $L^1([-1, 1])$ et $L^2([-1, 1])$.

4. Montrer que pour tout $x > 0$, on a

$$(D\Gamma(x))^2 \leq \Gamma(x) D^2\Gamma(x).$$

5. Soit E une partie mesurable de $\mathbb{R}^n$. Si on a $f_m \rightarrow f$ dans $L^{1,2,\infty}(E)$ et $g_m \rightarrow g$ dans $L^\infty(E)$, montrer que $f_m g_m \rightarrow f g$ dans $L^{1,2,\infty}(E)$.

6. Pour tout $n \in \mathbb{N}_0$, on pose

$$(1) \delta_n(x) = n \chi_{[-\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n}]}(x) \quad (2) \delta_n(x) = \frac{n}{\sqrt{\pi}} \exp(-n^2 x^2) \quad (3) \delta_n(x) = \frac{n}{\pi(1 + n^2 x^2)}$$

Pour chacune des fonctions δ_n ($n \in \mathbb{N}_0$), répondre aux questions suivantes.

(a) Examiner la convergence ponctuelle et uniforme sur $\mathbb{R}$ de la suite δ_n ($n \in \mathbb{N}_0$).

(b) Les fonctions δ_n sont-elles dans $L^1(\mathbb{R})$, dans $L^2(\mathbb{R})$ et/ou dans $L^\infty(\mathbb{R})$? Si c'est le cas, examiner la convergence des suites dans les espaces auxquels les fonctions appartiennent.

(c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}_0$, on a

$$\int_{\mathbb{R}} \delta_n(x) dx = 1.$$

(d) Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} \delta_n(x) \varphi(x) dx = \varphi(0)$$

pour tout¹ $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

FB + LS, 16 octobre 2009 (V1 : 13 octobre 2009)

¹La notation $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des fonctions indéfiniment continûment dérivables sur $\mathbb{R}$ dont le support est compact.