ANALYSE II , 2009-2010
2ème BP
Liste d'exercices 2
Octobre 2009

---

1. On pose $\zeta(x) = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m^x}$ pour tout $x \in]1, +\infty[$. Montrer que
$$\zeta(x)\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{e^t - 1} dt \qquad \forall x > 1.$$

2. Calculer si possible
$$\int_0^{\to +\infty} \frac{\sin(\lambda x)}{x} dx \quad \text{où } \lambda \in \mathbb{R}.$$

3. Etudier la convergence ponctuelle et uniforme des suites de fonctions suivantes, définies sur $[0, 1]$:
   - $f_n(x) = \frac{x}{x+n}$ $(n \in \mathbb{N}_0)$.
   - $g_n(x) = \frac{nx}{1+nx}$ $(n \in \mathbb{N}_0)$.

4. Etudier la convergence ponctuelle et uniforme des suites de fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par
   - $f_m(x) = \chi_{[-\frac{1}{m},0]}(x)(mx + 1) + \chi_{]0,\frac{1}{m}]}(x)(1 - mx)$.
   - $f_m(x) = \chi_{[-\frac{1}{m},0]}(x)(m^2 x + m) + \chi_{]0,\frac{1}{m}]}(x)(-m^2 x + m)$.
   - $f_m(x) = \chi_{[-\frac{1}{m},0]}(x)(x + \frac{1}{m}) + \chi_{]0,\frac{1}{m}]}(x)(-x + \frac{1}{m})$.

5. Pour tout $m \in \mathbb{N}_0$, soit la fonction f_m donnée par $f_m(x) = m^2 x^2 e^{-mx}$, $x \in [0, +\infty[$. Etudier la convergence ponctuelle et uniforme de la suite f_m $(m \in \mathbb{N}_0)$ sur $[0, +\infty[$, $[r, +\infty[$ (où $r > 0$) ainsi que sur les ensembles bornés fermés (compacts) inclus dans $]0, +\infty[$.

6. Etablir que pour tout naturel strictement positif m, la fonction $x \mapsto \sin(mx)$ appartient à l'espace $L^1([0, 2\pi])$ (resp. $L^1([0, 2\pi])$, $L^1([0, 2\pi])$) mais que les normes sont différentes.