2ème année de bachelier en sciences physiques
ANALYSE II
Convergence ponctuelle et uniforme

Exercice 1. Étudier la convergence ponctuelle et uniforme des suites de fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par

a)$\chi_{[-m,m]}$, b)$m\chi_{[-m,m]}$, c)$\dfrac{\chi_{[-1/m,1/m]}}{m}$, d)$m\chi_{[-1/m,1/m]}$, e)$\dfrac{\chi_{[1/m,2/m]}}{m}$.

Exercice 2. Étudier la convergence ponctuelle et uniforme des suites de fonctions définies par

a) $f_m(x) = \dfrac{x}{x+m}$ sur $[0,1]$ $(m \in \mathbb{N}_0)$,
b) $g_m(x) = \dfrac{mx}{1+mx}$ sur $[0,1]$ $(m \in \mathbb{N}_0)$,
c) $h_m(x) = e^{-2x}\dfrac{x^m}{m!}$ sur $[0,+\infty[$ $(m \in \mathbb{N}_0)$.

Exercice 3. Etudier la convergence ponctuelle et uniforme des suites de fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par

a) $f_m(x) = (1-|mx|)\chi_{[-1/m,1/m]}(x)$ $(m \in \mathbb{N}_0)$,
b) $g_m(x) = (m-|m^2x|)\chi_{[-1/m,1/m]}(x)$ $(m \in \mathbb{N}_0)$.

Exercice 4. Pour tout $m \in \mathbb{N}_0$, soit la fonction f_m donnée par $f_m(x) = (1-x^2)^m$, $x \in [0,1]$. Etudier la convergence ponctuelle et uniforme de la suite f_m $(m \in \mathbb{N}_0)$ sur $[0,1]$ ainsi que sur les sous-intervalles fermés de $[0,1]$.

Exercice 5. Pour tout $m \in \mathbb{N}_0$, soit la fonction f_m donnée par $f_m(x) = m^2x^2e^{-mx}$, $x \in [0,+\infty[$. Etudier la convergence ponctuelle et uniforme de la suite f_m $(m \in \mathbb{N}_0)$ sur $[0,+\infty[$, $[r,+\infty[$ (où $r > 0$) ainsi que sur les intervalles bornés fermés (compacts) inclus dans $]0,+\infty[$.

Exercice 6. Développer la fonction arctg en série de puissances de x. Étudier ensuite la convergence ponctuelle et uniforme de la série obtenue.