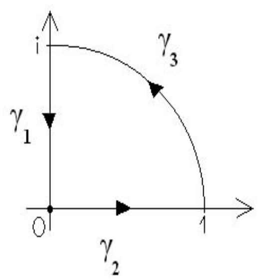
Répétition du cours d'Analyse II
2ème BP
26 Février 2010

1. a) On considère le paramétrage $\gamma(t) = 1 - 2t$, $t \in [-1, 1]$. Calculer $\int_\gamma x^2 dx$.
   b) On considère le paramétrage de l'arcade de cycloïde $\gamma(t) = (t - \sin(t), 1 - \cos(t))$, $t \in [0, 2\pi]$. Représenter la courbe déterminée par ce paramétrage et calculer si possible $\int_\gamma f_1 dx + f_2 dy$ avec $\vec{f}(x, y) = [x, -y]$.
   c) On considère un paramétrage γ injectif et régulier du segment d'origine $(0, 0, 0)$ et d'extrémité $(1, 1, 0)$. Calculer si possible l'intégrale $\int_\gamma f_1 dx + f_2 dy + f_3 dz$ avec $\vec{f}(x, y, z) = [x, -z, 2y]$.
2. On considère la fonction $f(z) = |z|$. Calculer si possible
$$\int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz + \int_{\gamma_3} f(z)dz$$
pour les paramétrages injectifs et C_1 suivants :



3. On considère un paramétrage γ injectif et régulier de la circonférence centrée en l'origine et de rayon $r > 0$. Calculer si possible $\int_\gamma f(z)dz$ avec $f(z) = z$, $f(z) = \overline{z}$, $f(z) = \Re z$, $f(z) = 1/z$ et $f(z) = 1/z^2$.
4. Soit γ le bord du carré centré en l'origine, de longueur de côté égale à 2. On considère qu'on parcourt ce bord "aire à gauche" et qu'on utilise un paramétrage injectif. Déterminer la valeur des intégrales suivantes :
$$\int_\gamma \Re z \ dz, \qquad \int_\gamma \Im z \ dz, \qquad \int_\gamma \frac{1}{z} \ dz.$$
5. Où les fonctions suivantes sont-elles holomorphes ?
$$f_1(z) = e^z, \qquad f_2(z) = 3z^2 - z + 1, \qquad f_3(z) = e^{1/z}, \qquad f_4(z) = \frac{1}{\sin(z)},$$
$$f_5(z) = \frac{1}{z^4 + 1}, \qquad f_6(z) = \frac{1}{e^z - 1}, \qquad f_7(z) = \frac{1}{e^{iz} + i}, \qquad f_8(z) = \frac{\sin(z)}{\sinh(z)},$$
$$f_9(z) = \frac{1}{(z^2 + z + 1)^2}.$$