ANALYSE II – 2BM, année académique 2009-2010

Liste d'exercices 3

Octobre – Novembre 2009

---

1. Calculer et représenter graphiquement la fonction g définie par

$$g(x) = \chi_{[0,1]} \star \chi_{[1,2]} \star \chi_{[2,3]}(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

2. Déterminer, si possible, le produit de convolution des fonctions f et g définies par

$$f(x) = x \quad \text{et} \quad g(x) = e^{-x}\chi_{]0,+\infty[}.$$

3. Pour tout $m \in \mathbb{N}_0$, on pose

$$f_m(x) = \frac{e^x x^m}{m!}\chi_{]0,+\infty[}(x).$$

Pour tous $m, n \in \mathbb{N}_0$, calculer (si possible)

$$f_m \star f_n \quad \text{et} \quad f_{m+n+1}$$

et comparer ces fonctions.

4. La densité de probabilité d'une variable aléatoire gaussienne d'écart-type σ est donnée par

$$G_\sigma(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(\frac{-x^2}{2\sigma^2}\right).$$

   (a) Vérifier que

$$\int_{\mathbb{R}} G_\sigma(x)\,dx = 1, \quad \int_{\mathbb{R}} xG_\sigma(x)\,dx = 0 \quad \text{et} \quad \int_{\mathbb{R}} x^2 G_\sigma(x)\,dx = \sigma^2.$$

   (b) Etablir que

$$G_\sigma \star G_\tau = G_{\sqrt{\sigma^2+\tau^2}}.$$

5. (a) Le produit de convolution de deux fonctions intégrables et paires sur $\mathbb{R}$ est-il pair, impair ? Et celui de deux fonctions intégrables et impaires sur $\mathbb{R}$? Ou encore celui de deux fonctions intégrables sur $\mathbb{R}$ dont l'une est paire et l'autre impaire ? Pourquoi ?

   (b) Posons

$$f(x) = e^{-|x|} \quad \text{et} \quad g(x) = x \quad (x \in \mathbb{R}).$$

   Calculer (si possible) $f \star f$ ainsi que $f \star g$.

6. Montrer que les suites de fonctions δ_n ($n \in \mathbb{N}_0$) définies à l'exercice 6 de la liste d'exercices 2 sont des unités approchées de convolution dans $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ et dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$.

7. (a) Démontrer que si $f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)$ est tel que $f \star f^* = 0$, alors $f = 0$ *pp* sur $\mathbb{R}^n$.

   (b) En déduire que[1] si $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^n)$ est tel que $f \star f^* = 0$ *pp* sur $\mathbb{R}^n$, alors $f = 0$ *pp* sur $\mathbb{R}^n$.

FB + LS, 23 octobre 2009 (V1 : 22 octobre 2009)

---

1. Suggestion : penser aux unités universelles approchées de convolution.