ANALYSE II , 2009-2010
2ème BP
Liste d'exercices 3
Octobre 2009

Ceci constitue une liste d'exercices qui viennent en supplément de ceux résolus aux cours et aux répétitions

---

1. Déterminer si les fonctions données explicitement ci-dessous sont dans $L^1(]0,+\infty[)$, $L^2(]0,+\infty[)$ et $L^\infty(]0,+\infty[)$. En déterminer alors la norme correspondante.

   - $f(x) = x^{-\frac{1}{2}}(1+x)^{-1}$
   - $g(x) = (1+x)^{-1}$.

2. Dans $L^2(E)$, montrer que l'on a les égalités suivantes:

   - $||f||^2 + ||g||^2 = \dfrac{||f+g||^2 + ||f-g||^2}{2}$
   - $< f, g > + < g, f >= \dfrac{||f+g||^2 - ||f-g||^2}{2}$.

3. a) Déterminer si les fonctions données explicitement ci-dessous (n est un naturel strictement positif) sont dans $L^1(\mathbb{R})$, $L^2(\mathbb{R})$, $L^\infty(\mathbb{R})$.

   - $f_n(x) = n\chi_{[-\frac{1}{2n},\frac{1}{2n}]}(x)$
   - $f_n(x) = ne^{-n^2x^2}$
   - $f_n(x) = \dfrac{n}{1+n^2x^2}$.

   b) Dans chaque cas, examiner alors la convergence ponctuelle et la convergence dans l'espace correspondant $L^{1,2,\infty}$ de la suite f_n ($n \in \mathbb{N}_0$).

4. Soient a,$b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Si $f \in C_1(]a,b[) \cap C_0([a,b])$ et si $Df \in L^2(]a,b[)$, montrer que

$$|f(b) - f(a)|^2 \leq (b-a)||Df||^2_{L^2(]a,b[)}$$

5. Si

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}dt \quad (x > 0)$$

   montrer que

$$\Gamma\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \sqrt{\Gamma(x)\Gamma(y)}, \quad \forall x, y > 0.$$

FB, DK, October 12, 2009 (V1 9 octobre 2009)