2ème année de bachelier en sciences physiques
ANALYSE II
Espaces $L^1(E)$, $L^2(E)$ et $L^\infty(E)$

Exercice 1. Établir que pour tout naturel strictement positif m, la fonction $x \mapsto \cos^2(mx)$ appartient à l'espace $L^1([0,2\pi])$ (resp. $L^2([0,2\pi])$, $L^\infty([0,2\pi])$) mais que les normes sont différentes.

Exercice 2. On définit la fonction suivante :

$$f(x) = \begin{cases} xe^{-x} & \text{, si } x \geq 0 \\ 0 & \text{, si } x < 0. \end{cases}$$

a) Déterminer à quel(s) espace(s) $L^1(\mathbb{R})$,$L^2(\mathbb{R})$,$L^\infty(\mathbb{R})$ elle appartient.
b) Déterminer la norme de f dans chacun des espaces auquel elle appartient.

Exercice 3. Dans $L^2(E)$, montrer que l'on a les égalités suivantes :

a) $||f||^2 + ||g||^2 = \dfrac{||f+g||^2 + ||f-g||^2}{2}$
b) $< f, g > + < g, f >= \dfrac{||f+g||^2 - ||f-g||^2}{2}.$

Exercice 4. On donne les fonctions f, g et h par

$$\text{a)} f(x) = e^{-|x|}, \qquad \text{b)} g(x) = e^{-|x-1|}, \qquad \text{c)} h(x) = \cos(2\pi x).$$

Déterminer si possible
- les normes de f dans $L^1(\mathbb{R})$, $L^2(\mathbb{R})$ et $L^\infty(\mathbb{R})$,
- même question pour g et h,
- même question pour h mais dans les espaces $L^1([0,1])$, $L^2([0,1])$ et $L^\infty([0,1])$,
- le produit scalaire dans $L^2(\mathbb{R})$ des fonctions fh et f

Exercice 5. Si

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt \quad (x > 0)$$

montrer que

$$\Gamma\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \sqrt{\Gamma(x)\Gamma(y)}, \quad \forall x, y > 0.$$

Exercice 6. Montrer que $L^2([0,1]) \subseteq L^1([0,1])$ et que $||f||_1 \leq ||f||_2$ pour tout $f \in L^2([0,1])$.

Exercice 7. a) Déterminer si les fonctions données explicitement ci-dessous (m est un naturel strictement positif) sont dans $L^1(\mathbb{R})$, $L^2(\mathbb{R})$, $L^\infty(\mathbb{R})$:

$$f_m(x) = m\chi_{[-\frac{1}{2m},\frac{1}{2m}]}(x), \qquad g_m(x) = e^{-m^2x^2}, \qquad h_m(x) = \frac{m}{1+m^2x^2}, \qquad k_m(x) = \frac{1}{m}\chi_{[-m,m]}(x).$$

b) Dans chaque cas, examiner alors la convergence ponctuelle, uniforme et la convergence dans l'espace correspondant $L^{1,2,\infty}$ des suites f_m, g_m, h_m et k_m $(m \in \mathbb{N}_0)$.

Exercice 8. Pour tout $m \in \mathbb{N}_0$, on définit la fonction g_m par

$$g_m(x) = m^{3/2}xe^{-mx},\ x \in [0,+\infty[.$$

a) Pour tout m, déterminer à quels espaces $L^1([0,+\infty[)$, $L^2([0,+\infty[)$, $L^\infty([0,+\infty[)$ appartient la fonction g_m et en calculer les normes correspondantes.
b) Étudier la convergence ponctuelle de la suite g_m $(m \in \mathbb{N}_0)$.
c) Étudier la convergence de la suite g_m $(m \in \mathbb{N}_0)$ dans chacun des espaces $L^1([0,+\infty[)$, $L^2([0,+\infty[)$ et $L^\infty([0,+\infty[)$.