Répétition du cours d'Analyse II
2ème BP
12 Mars 2010

1. Déterminer $Log z$ pour les complexes z suivants :

$$-10, \quad 2-2i, \quad i, \quad -i, \quad e^{-i}.$$

Déterminer les parties réelle et imaginaire des complexes suivants :

$$(-i)^i, \quad (-1)^{1+i}.$$

2. (a) Déterminer où les fonctions suivantes sont holomorphes :

$$f_1(z) = Log(1+z), \quad f_2(z) = \frac{Log z}{z^3+1}, \quad f_3(z) = \frac{z^{\frac{1}{2}}}{z-i}.$$

(b) Où la fonction suivante est-elle holomorphe ? Quelles en sont les singularités isolées [1] ?

$$f(z) = \frac{1}{\sin(1/z)}.$$

3. Est-il possible de calculer $Log((1+i)^i)$? Si la réponse est affirmative, calculer ce complexe.
4. On considère un paramétrage γ injectif et régulier de la circonférence centrée en l'origine et de rayon unitaire, orienté "aire à gauche". Calculer

$$\text{a)} \int_\gamma e^{z^2} dz, \quad \text{b)} \int_\gamma \frac{1}{z-2} dz, \quad \text{c)} \int_\gamma \frac{1}{z-\frac{1}{2}} dz, \quad \text{d)} \int_\gamma \frac{1}{z-\frac{i}{2}} dz, \quad \text{e)} \int_\gamma \frac{\sin(z)}{(z-\frac{1}{2})^2} dz.$$

5. Calculer si possible $\displaystyle\int_\gamma \frac{z^2-4}{z^2+4}\, dz$ où γ est un paramétrage orienté dans le sens anti-horloger, injectif et régulier de la circonférence :
   (a) centrée en i et de rayon 2 ;
   (b) centrée en 1 et de rayon 2 ;
   (c) centrée en $-3i$ et de rayon 2 ;
   (d) centrée en 0 et de rayon $\frac{\pi}{2}$.

---

1. Un complexe z_0 est appelé singularité isolée de f si f est holomorphe dans une boule centrée en z_0 excepté en z_0.