ANALYSE II – 2BM, ANNÉE ACADÉMIQUE 2009-2010

Liste d'exercices 4

Novembre 2009

Ceci constitue une liste d'exercices qui viennent en supplément de ceux résolus aux cours et aux répétitions.

---

1. Déterminer (si possible) la transformée de Fourier négative des fonctions suivantes ($x \in \mathbb{R}$) :
$$f(x) = xe^{-x}\chi_{[0,+\infty[}(x), \quad g(x) = |x|e^{-|x|} \quad \text{et} \quad h(x) = e^{-|x|}\cos(x).$$

2. Soient les fonctions f et g définies par
$$f(x) = \begin{cases} \pi - |x| & \text{si } x \in [-\pi, \pi] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{et} \quad g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [-\pi, \pi] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$
Déterminer les transformées de Fourier $(-)$ de ces fonctions et montrer que l'on a
$$\left(\mathcal{F}_y^- g\right)^2 = 4\,\mathcal{F}_{2y}^- f$$
pour tout $y \in \mathbb{R}$.

3. Soit la fonction f définie par $f(x) = e^{-2|x|}$, $x \in \mathbb{R}$. Déterminer les transformées de Fourier de f et en déduire la valeur de
$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(2x)}{x^2+4}\,dx.$$

4. On définit la fonction f_λ par
$$f_\lambda(t) = \frac{1}{\lambda\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2\lambda^2}}, \quad t \in \mathbb{R}$$
pour tout $\lambda \in \mathbb{R}_0$.
   (a) Montrer que pour tout $a > 0$, on a
$$\mathcal{F}^+_{x\to y} e^{-ax^2} = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{y^2}{4a}}.$$
   (b) A l'aide du point précédent, calculer $f_\lambda \star f_\mu$ pour $\lambda, \mu \in \mathbb{R}_0$.

5. Déduire de la formule de Parseval que
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x(1+x^2)}\,dx = \frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{1}{e}\right).$$

6. Si f est une fonction de carré intégrable telle que $x \mapsto xf(x)$ soit encore de carré intégrable, de même que $x \mapsto x\mathcal{F}_x^- f$, on pose [1]
$$\Delta_f = \int_{\mathbb{R}} x^2|f(x)|^2\,dx.$$
Considérons la gaussienne f donnée par $f(x) = e^{-x^2/4}$, $x \in \mathbb{R}$.
   (a) Déterminer sa norme dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$.
   (b) Calculer Δ_f.
   (c) En déduire l'égalité [2] $\Delta_f \Delta_{\mathcal{F}^- f} = \pi^2$.

FB + LS, 12 novembre 2009 (V1 : 6 novembre 2009)

---

1. Le principe d'incertitude d'Heisenberg affirme que $\Delta_f \Delta_{\mathcal{F}^- f} \geq \frac{1}{16\pi^2}$ lorsque f a été normalisé.
2. L'exercice 4(a) peut s'avérer utile pour montrer l'égalité.