

ANALYSE II , 2009-2010
2ème BP
Liste d'exercices 4
Octobre 2009

Ceci constitue une liste d'exercices qui viennent en supplément de ceux résolus aux cours et aux répétitions

1. On définit la fonction suivante:

$$f(x) = \begin{cases} xe^{-x} & , \text{ si } x \geq 0 \\ 0 & , \text{ si } x < 0. \end{cases}$$

- Déterminer à quel(s) espace(s) $L^1(\mathbb{R}), L^2(\mathbb{R}), L^\infty(\mathbb{R})$ elle appartient.
- Déterminer la norme de f dans chacun des espaces auquel elle appartient.

2. On donne les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = e^{-|x|}, \quad g(x) = \cos(2\pi x).$$

- Déterminer si possible les normes de f et g dans $L^1(\mathbb{R}), L^2(\mathbb{R}), L^\infty(\mathbb{R})$.
- Même question pour g mais cette fois dans les espaces $L^1([0, 1]), L^2([0, 1]), L^\infty([0, 1])$.
- Calculer si possible le produit scalaire dans $L^2(\mathbb{R})$ des fonctions ifg et if .

3. Pour tout m , on pose

$$f_m(x) = e^{-2x} \frac{x^m}{m!}.$$

- Pour tout $m \in \mathbb{N}_0$, déterminer si $f_m \in L^1(]0, +\infty[), L^2(]0, +\infty[), L^\infty(]0, +\infty[)$ et calculer les normes correspondantes aux espaces auxquels elle appartient.
- Etudier la convergence ponctuelle de la suite f_m ($m \in \mathbb{N}_0$).
- Etudier les convergences de la suite f_m ($m \in \mathbb{N}_0$) dans les espaces $L^1(]0, +\infty[), L^2(]0, +\infty[), L^\infty(]0, +\infty[)$ auxquels elle appartient.

4. Si

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt \quad (x > 0)$$

montrer que

$$(D\Gamma(x))^2 \leq \Gamma(x) D^2\Gamma(x), \quad \forall x > 0.$$