

2ème année de bachelier en sciences physiques
ANALYSE II
Produit de convolution

Exercice 1. On pose $f = \chi_{[2,4]}$. Calculer (si possible) $f * f$ et représenter les fonctions f et $f * f$.

Exercice 2. Calculer (si possible) le produit de convolution des fonctions f et g définies sur \mathbb{R} par

$$\begin{aligned} \text{a) } f(x) = |x| \text{ et } g(x) = \chi_{[-1,1]}(x), & \quad \text{b) } f(x) = e^x \chi_{[0,+\infty[}(x) \text{ et } g(x) = x, \\ \text{c) } f(x) = e^{-x} \chi_{[0,+\infty[}(x) \text{ et } g(x) = x, & \quad \text{d) } f(x) = g(x) = e^{-|x|}. \end{aligned}$$

Exercice 3. Soit un signal f (on suppose que cette fonction est intégrable et de carré intégrable). On définit l'*autocorrélation* du signal par

$$E_f(t) = \int_{\mathbb{R}} f(x) \overline{f(x-t)} dx, t \in \mathbb{R}.$$

On pose $f^s(x) = \overline{f(-x)}, x \in \mathbb{R}$.

- Montrer que l'autocorrélation s'écrit $E_f = f * f^s$.
- Montrer que l'autocorrélation d'une fonction à valeurs réelles est une fonction paire.
- Montrer que $\sup_{t \in \mathbb{R}} |E_f(t)| = E_f(0)$.

Exercice 4. Le produit de convolution de deux fonctions intégrables sur \mathbb{R} et paires est-il pair/impair? Qu'en est-il si les deux fonctions sont intégrables sur \mathbb{R} et impaires? Qu'en est-il si une est paire et l'autre impaire?

Exercice 5. Pour tout $m \in \mathbb{N}_0$, on pose

$$f_m(x) = \frac{e^x x^m}{m!} \chi_{[0,+\infty[}(x).$$

Pour tout $m, n \in \mathbb{N}_0$, calculer (si possible)

$$f_m * f_n, \quad f_{m+n+1}.$$