ANALYSE II – 2BM, ANNÉE ACADÉMIQUE 2009-2010

Liste d'exercices 5

Décembre 2009

Ceci constitue une liste d'exercices qui viennent en supplément de ceux résolus aux cours et aux répétitions.

Dans chaque exercice, spécifier s'il s'agit de la transformée de Fourier dans $\mathbf{L}^1$ ou dans $\mathbf{L}^2$.

1. Soit la fonction f définie par
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\cos(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$
   (a) Montrer que cette fonction est continue sur $\mathbb{R}$, appartient à $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ mais pas à $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$.
   (b) En déterminer la transformée de Fourier négative.

2. Déterminer les transformées de Fourier de la fonction
$$x \mapsto i\pi \operatorname{sign}(x)\, e^{-|x|}$$
   et en déduire celles de la fonction
$$x \mapsto \frac{x}{1+x^2}.$$

3. Soit $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^n)$. Montrer que
$$\mathcal{F}^{\pm} f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n) \quad \Leftrightarrow \quad f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)$$

4. Soit la fonction f donnée sur $[-\pi, \pi]$ par
$$f(x) = |x|.$$
   (a) Développer cette fonction en série trigonométrique de Fourier dans $\mathrm{L}^2([-\pi,\pi])$. Exprimer votre réponse en utilisant uniquement des fonctions sin et cos et simplifier les calculs au maximum.
   (b) En déduire
$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8} \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}.$$

5. (a) On se place dans l'espace $\mathrm{L}^2([-1,1])$ muni du produit scalaire habituel. Pour tout $m \in \mathbb{N}_0$, déterminer le produit scalaire des fonctions f et g_m définies par
$$f(x) = \sin(\pi x) \quad \text{et} \quad g_m(x) = \sin(\pi m x).$$
   (b) Dans l'espace $\mathrm{L}^2([-1,1])$, on a le développement suivant
$$x = \sum_{m=1}^{+\infty} a_m \sin(\pi m x).$$
   En prenant le produit scalaire de chacun des deux memebres de l'égalité avec la fonction $x \mapsto \sin(\pi x)$, déterminer la valeur de a_1.

FB + LS, 24 novembre 2009 (V1 : 20 novembre 2009)