

ANALYSE II , 2009-2010
2ème BP
Liste d'exercices 5
Octobre–Novembre 2009

Ceci constitue une liste d'exercices qui viennent en supplément de ceux résolus aux cours et aux répétitions

1. On considère deux fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \sin(x) \quad \text{et} \quad g(x) = \chi_{[0, \pi/2]}(x).$$

Calculer si possible le produit de convolution de f et g .

2. Exercice 5.12 du livre d'exercice.

3. On définit deux fonctions f et g sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = |x| \quad \text{et} \quad g(x) = \chi_{[-1, 1]}(x).$$

Montrer que ces fonctions sont composables; calculer $f * g$ et représenter graphiquement f et $f * g$.

4. Calculer si possible le produit de convolution des fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par

- $f(x) = e^x \chi_{[0, +\infty[}(x)$ et $g(x) = x$
- $f(x) = e^{-x} \chi_{]0, +\infty[}(x)$ et $g(x) = x$
- $f(x) = g(x) = e^{-|x|}$
- $f(x) = \chi_{[-1, 1]}(x)$ et $g(x) = \chi_{[0, 2]}(x) + 2\chi_{[2, 4]}(x)$.

5. Exercice 5.2 du livre d'exercices.

6. On pose

$$e_n(x) = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \chi_{]0, +\infty[}(x), \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Montrer que

$$D^n(e_m * f) = e_{m-n} * f, \quad D^k(e_k * f) = f$$

pour tous naturels strictement positifs m, n, k tels que $m > n$ et toute fonction f indéfiniment continûment dérivable à support borné fermé dans $\mathbb{R}$.