ANALYSE II , 2009-2010
2ème BP
Liste d'exercices 6
Novembre 2009

Ceci constitue une liste d'exercices qui viennent en supplément de ceux résolus aux cours et aux répétitions

---

1. On définit une fonction f sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x\chi_{[-1,1]}(x).$$

Déterminer si possible sa transformée de Fourier dans $L^1(\mathbb{R})$ (positive).

2. Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} \pi - |x| & \text{si } x \in [-\pi, \pi] \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [-\pi, \pi] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Représenter graphiquement f et g. Déterminer ensuite les transformées de Fourier négatives de ces fonctions et montrer que

$$(\mathcal{F}_y^- g)^2 = 4(\mathcal{F}_{2y}^- f) \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

3. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

On demande de calculer si possible la transformée de Fourier de $f * f$ sans déterminer explicitement le produit de composition.

4. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = e^{-2|x|}.$$

   a) Déterminer les transformées de Fourier (positive et négative) de cette fonction.
   b) En déduire la valeur de

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(2x)}{x^2+4} dx.$$

5. Déduire de la formule de Parseval[1] que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x(1+x^2)} dx = \frac{\pi}{2}(1 - \frac{1}{e}).$$

FB, DK, November 7, 2009 (V1 10 Novembre 2009)

[1] *Suggestion*: calculer la transformée de Fourier des fonctions $\chi_{[-1,1]}$ et $e^{-|x|}$.