ANALYSE II – 2ème BMP
Au sujet de la transformée de Fourier dans $L^2$
Novembre 2009 (preuves différentes de celles du livre de référence)

---

Transformée de Fourier dans $L^2$ et produit de composition.

*Si $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ et si $h \in L^1 \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ alors*

$$F^{\pm}(f * h) = F^{\pm}F \ \mathcal{F}^{\pm}h.$$

Preuve. Si $\varphi_m$ ($m \in \mathbb{N}_0$) est une suite de $L^1 \cap L^2$ qui converge dans $L^2$ vers $f$, alors la suite $\varphi_m * h$ ($m \in \mathbb{N}_0$) de $L^1 \cap L^2$ converge dans $L^2$ vers $f * h$ donc

$$F^{\pm}(f * h) = \lim_m F^{\pm}(\varphi_m * h) = \lim_m \mathcal{F}^{\pm}(\varphi_m * h) = \lim_m \left(\mathcal{F}^{\pm}\varphi_m \ \mathcal{F}^{\pm}h\right) = F^{\pm}f \ \mathcal{F}^{\pm}h$$

car si $G_m$ converge dans $L^2$ vers $G$ alors $G_m B$ converge aussi dans le même espace vers $GB$ pour toute fonction $B \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$.□

Soit la gaussienne

$$g(x) = e^{-|x|^2}, \ x \in \mathbb{R}^n.$$

Pour rappel, on a

$$\mathcal{F}^{\pm}_y g = \pi^{n/2} g(y/2), \ y \in \mathbb{R}^n.$$

Régularité du produit de composition.

*Pour tout $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, la fonction $f * g$ est de classe $C_\infty$ dans $\mathbb{R}^n$ et on a*

$$D^\alpha(f * g) = f * D^\alpha g.$$

*Si en outre $f \in C_L(\mathbb{R}^n)$, $D^\alpha f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ pour $|\alpha| \le L$ alors*

$$D^\alpha(f * g) = (D^\alpha f) * g \quad |\alpha| \le L.$$

Preuve. Il s'agit d'une application du théorème de dérivation des intégrales paramétriques.

Notons tout d'abord que pour tout multi-indice $\alpha$, on a

$$D^\alpha_x g(x - y) = P(x - y) g(x - y)$$

où $P$ est un polynôme de degré $|\alpha|$.

Il est alors direct de vérifier les hypothèses "naturelles" du théorème (de dérivation des intégrales paramétriques) pour la fonction ($y$ est la variable d'intégration et $x$ le paramètre)

$$(x, y) \mapsto f(y) g(x - y)$$

car quel que soit $\alpha$, les dérivées $D^\alpha_x g(x - y)$ possèdent des propriétés analogues à la gaussienne. Cela étant, soit un compact $K$ de $\mathbb{R}^n$. Il existe alors $r > 0$ et $R > 0$ tels que

$$|x - y|^2 \ge (|y| - r)^2 \ge \frac{1}{2}|y|^2, \quad \forall x \in K, \forall |y| \ge R$$

et un polynôme $Q$ tel que

$$|P(x - y)| \le Q(y), \quad \forall x \in K, \ \forall y \in \mathbb{R}^n.$$

Il s'ensuit que

$$\sup_{x\in K} |f(y)\ D^\alpha_x g(x-y)| \leq\ C|f(y)| \quad Q(y)e^{-|y|^2/2},\ \forall y \in \mathbb{R}^n$$

où la fonction à droite de l'inégalité est intégrable (comme produit de deux fonctions de carré intégrable).

Lorsque la fonction $f$ est en outre régulière, à dérivées dans $L^2$, des intégrations par parties successives conduisent à

$$f * D^\alpha g = D^\alpha f * g.\square$$

<u>Transformée de Fourier dans $L^2$ et dérivation.</u>

*Si $f \in C_L(\mathbb{R}^n)$, $D^\alpha f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ pour $|\alpha| \leq L$ alors*

$$F^\pm_y(D^\alpha f) = (\pm iy)^\alpha F^\pm_y f \quad |\alpha| \leq L.$$

Preuve. Vu ce qui précède, on a

$$D^\alpha(f*g) = (D^\alpha f)*g = f*(D^\alpha g)$$

donc

$$F^\pm_y\left((D^\alpha f)*g\right) = \left(F^\pm_y(D^\alpha f)\right)\ \mathcal{F}^\pm_y g = \left(F^\pm_y f\right)\ \mathcal{F}^\pm_y(D^\alpha g) = F^\pm_y f\ (\pm iy)^\alpha \mathcal{F}^\pm_y g.$$

Puisque la tranformée de Fourier de $f$ ne s'annule en aucun point, on conclut.$\square$

FB, November 23, 2009