

Si $a, b \in \mathbb{R}$ sont tels que $a < b$ et si $m \in \mathbb{Z}$, on pose

$$u_m(x) = \frac{1}{\sqrt{b-a}} e^{\frac{2i\pi mx}{b-a}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Si $f \in L^2([a, b])$, on définit également la suite de sommes partielles

$$S_M(f) = \sum_{m=-M}^M \langle f, u_m \rangle u_m, \quad M \in \mathbb{N}_0$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne le produit scalaire habituel

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) \overline{g(x)} dx, \quad f, g \in L^2([a, b])$$

de l'espace $L^2([a, b])$.

Pour alléger les notations, considérons le cas $a = 0$ et $b = 2\pi$.

RÉSULTATS AUXILIAIRES

Pour tout $M \in \mathbb{N}_0$, posons¹⁰

$$D_M(y) = \begin{cases} 2M+1 & \text{si } y \text{ est un multiple entier de } 2\pi \\ \frac{\sin((2M+1)\frac{y}{2})}{\sin(\frac{y}{2})} & \text{sinon} \end{cases}$$

Propriétés.

1. Pour tout $M \in \mathbb{N}_0$, D_M est pair, 2π -périodique et on a

$$D_M(y) = \sum_{m=-M}^M e^{imy}, \quad \int_0^{2\pi} D_M(t+a) dt = 2\pi, \quad \forall a \in \mathbb{R}.$$

2. Pour toute fonction f appartenant à $L^2([0, 2\pi])$ et pour tout $M \in \mathbb{N}_0$, on a

$$S_M(f)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} D_M(x-y) f(y) dy, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Si f est en outre 2π -périodique, on a aussi

$$S_M(f)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} D_M(y) f(x-y) dy, \quad x \in \mathbb{R}.$$

3. Pour toute fonction f de classe C_2 sur $\mathbb{R}$ et à support compact dans $]0, 2\pi[$, la suite $S_M(f)$, ($M \in \mathbb{N}_0$) converge uniformément sur $[0, 2\pi]$ vers f .

¹⁰ D_M est appelé noyau de Dirichlet de degré M

Preuve. 1. Le premier point résulte d'une sommation de termes consécutifs d'une suite géométrique.

2. On a successivement

$$\begin{aligned} S_M(f)(x) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-M}^M \int_0^{2\pi} f(y) e^{-imy} dy e^{imx} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{m=-M}^M e^{im(x-y)} f(y) dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} D_M(x-y) f(y) dy \end{aligned}$$

et, si f est 2π -périodique, un changement de variable linéaire conduit au résultat.

3. (a) Montrons que la suite converge ponctuellement vers f dans $[0, 2\pi]$. Pour $x \in [0, 2\pi]$, on a (*)

$$\begin{aligned} S_M(f)(x) - f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} D_M(x-y) f(y) dy - f(x) \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} D_M(x-y) dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (f(y) - f(x)) D_M(x-y) dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(y) - f(x)}{\sin((x-y)/2)} \sin\left((2M+1)\frac{x-y}{2}\right) dy. \end{aligned}$$

Si on montre que fonction $y \mapsto \frac{f(y)-f(x)}{\sin((x-y)/2)}$ est intégrable sur $[0, 2\pi]$, on peut alors conclure car vu (*), $|S_M(f)(x) - f(x)|$ est majoré par un multiple du module de la transformée de Fourier (en $(2M+1)/2$) d'une fonction intégrable.

Pour $x \in]0, 2\pi[$ on a $-\pi < (x-y)/2 < \pi$ quel que soit $y \in [0, 2\pi]$; la fonction $y \mapsto \frac{f(y)-f(x)}{\sin((x-y)/2)}$ est donc continue sur $[0, x[\cup]x, 2\pi]$ et comme

$$\lim_{y \rightarrow x} \frac{f(y) - f(x)}{\sin((x-y)/2)} = \lim_{y \rightarrow x} \left(\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \frac{y - x}{\sin((x-y)/2)} \right) = -2Df(x)$$

on conclut à l'intégrabilité de $y \mapsto \frac{f(y)-f(x)}{\sin((x-y)/2)}$ sur $[0, 2\pi]$.

Si $x = 0$, alors $y \mapsto \frac{f(y)-f(x)}{\sin((x-y)/2)} = -\frac{f(y)}{\sin(y/2)}$ est continu sur $]0, 2\pi[$ et

$$\lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{f(y)}{\sin(y/2)} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\sin(y/2)} Df(0) = 0, \quad \lim_{y \rightarrow (2\pi)^-} \frac{f(y)}{\sin(y/2)} = \lim_{y \rightarrow (2\pi)^-} \frac{(y-2\pi)}{\sin(y/2)} Df(2\pi) = 0.$$

Il s'ensuit que $y \mapsto \frac{f(y)-f(x)}{\sin((x-y)/2)}$ est intégrable sur $[0, 2\pi]$. On procède de même pour $x = 2\pi$.

(b) Montrons que la suite converge uniformément¹¹ dans $[0, 2\pi]$ (donc dans $L^2([0, 2\pi])$). Pour tout $x \in [0, 2\pi]$ et tout tronçon de Cauchy, on a

$$\frac{1}{2\pi} \left| \sum_{m=p}^q \left(\int_0^{2\pi} f(y) e^{-imy} dy \right) e^{imx} \right| = \frac{1}{2\pi} \left| \sum_{m=p}^q \frac{1}{m^2} \left(\int_0^{2\pi} D^2 f(y) e^{-imy} dy \right) e^{imx} \right| \leq C \sum_{m=p}^q \frac{1}{m^2}.$$

D'où la conclusion. $\square$

Remarque 1. Dans le point (3) ci-dessus, si on suppose avoir périodisé f , alors la nouvelle fonction est encore de classe C_2 sur $\mathbb{R}$ et sa périodicité permet d'écrire (et cela quel que soit $x \in \mathbb{R}$)

$$\begin{aligned} S_M(f)(x) - f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} D_M(y) (f(x-y) - f(x)) dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin\left((2M+1)\frac{y}{2}\right) \frac{f(x-y) - f(x)}{\sin(y/2)} dy \end{aligned}$$

La justification de l'intégrabilité de $y \mapsto \frac{f(x-y)-f(x)}{\sin(y/2)}$ est alors un peu plus directe.

¹¹ Comme $f \in L^2([0, 2\pi])$, on sait à priori que la suite $S_M(f)$ est convergente dans $L^2([0, 2\pi])$; on pourrait donc se passer de cette partie de la preuve mais celle-ci a un intérêt propre, comme on le constatera dans la suite.

Remarque 2. On obtient de façon analogue le résultat suivant¹².

Pour toute fonction f de classe C_1 par morceaux sur $[0, 2\pi]$, on a $f \in L^2([0, 2\pi])$ et

$$\lim_{M \rightarrow +\infty} S_M(f)(x) = f(x)$$

en tout $x \in]0, 2\pi[$ où f est dérivable. De plus on a

$$\lim_{M \rightarrow +\infty} S_M(f)(x) = \frac{f(x+) + f(x-)}{2}$$

en tout $x \in]0, 2\pi[$, où on note $f(x+)$ la limite à droite de f en x et $f(x-)$ la limite à gauche de f en x et

$$\lim_{M \rightarrow +\infty} S_M(f)(0) = \lim_{M \rightarrow +\infty} S_M(f)(2\pi) = \frac{f(0+) + f((2\pi)-)}{2}$$

THÉORÈME

Les fonctions u_m ($m \in \mathbb{Z}$) forment une suite orthonormée totale dans $L^2([a, b])$

Preuve. Un calcul direct montre que les fonctions sont orthogonales deux à deux et que leur norme dans $L^2([a, b])$ vaut 1.

Démontrons à présent que ces fonctions forment une suite totale. Pour plus de facilité dans les notations, considérons $a = 0$ et $b = 2\pi$.

Soit $f \in L^2([0, 2\pi])$ tel que $\langle f, u_m \rangle = 0$ pour tout m . Montrons que $f = 0$.

Vu le théorème d'approximation dans L^2 , il existe une suite de fonction φ_m ($m \in \mathbb{N}_0$) de classe C_∞ dans $\mathbb{R}$, à support compact dans $]0, 2\pi[$ et qui converge vers f dans $L^2([0, 2\pi])$; cette suite est donc telle que

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \langle f, \varphi_m \rangle = \|f\|^2.$$

Vu les résultats auxiliaires précédents, pour tout m , on a

$$\lim_{M \rightarrow +\infty} S_M(\varphi_m) = \varphi_m$$

dans $L^2([0, 2\pi])$. Cela étant, comme f est orthogonal à chaque u_k et comme $S_M(\varphi_m)$ est une combinaison linéaire de telles fonctions quels que soient m et M , on obtient que, pour tout m

$$\langle f, \varphi_m \rangle = \lim_{M \rightarrow +\infty} \langle f, S_M(\varphi_m) \rangle = 0$$

donc

$$0 = \lim_{m \rightarrow +\infty} \langle f, \varphi_m \rangle = \|f\|^2$$

et par suite $f = 0$. $\square$

¹²Il existe également d'autres hypothèses sur f pour obtenir des résultats similaires concernant la convergence ponctuelle des séries trigonométriques de Fourier