Analyse II, partie 1 – Calcul intégral

Exercice 1. Calculer (si possible) les intégrales suivantes :

(a) $\displaystyle\int_{1/2}^{3} \sqrt{3-\frac{x}{2}}\,dx$ (b) $\displaystyle\int_0^{\pi} x\,\cos^2(x)\,dx$ (c) $\displaystyle\int_0^1 \ln(x^2)\,dx$ (d) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{-2|x|}\,dx$

(e) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{\sin(x)}{\cos^2(x)}\,dx$ (f) $\displaystyle\int_{\pi/3}^{+\infty} \sin(2x)\,e^{-x}\,dx$ (g) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin(2x)\,\ln(1+\cos(x))\,dx$

Exercice 2. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x)=\begin{cases} x & \text{si } x\in[0,1] \\ 2-x & \text{si } x\in[1,2] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

(a) Représenter le graphique de f dans un repère orthonormé.

(b) Calculer (si possible) l'intégrale

$$\int_{\mathbb{R}} e^{3ix}\,f(x)\,dx.$$

Exercice 3. Pour $a>0$ et $n\in\mathbb{N}$, calculer

$$I_n=\int_0^{+\infty} x^{2n}\,e^{-ax^2}\,dx.$$

Exercice 4. Montrer que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2+1}\,dx=0$$

et en déduire pour $a,b>0$ que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(ax)}{x^2+b^2}\,dx=\frac{\pi\ln(ab)}{2b}.$$

Exercice 5. Si $E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0<y<1,\ y<x<1\}$, calculer (si possible)

$$\iint_E x^2\,e^{xy}\,dxdy \qquad \text{et} \qquad \iint_E \frac{\exp(-y/x)}{1+x}\,dxdy.$$

Exercice 6. Etant donné $R>0$, calculer (si possible)

$$\int_0^{R/2}\left[\int_{\sqrt{3}y}^{\sqrt{R^2-y^2}} x^2y^2\,dx\right]dy.$$

Exercice 7. Calculer (si possible) l'intégrale

$$\iint_{]0,1[\times]0,\frac{\pi}{2}[} \frac{dxdy}{1+x^2\,\mathrm{tg}^2(y)}.$$

En déduire la valeur de

$$\int_0^{\pi/2} y\,\mathrm{cotg}(y)\,dy.$$

L. Simons & F. Bastin – 28 septembre 2010.