ANALYSE II

Notions de calcul intégral-Rappels**1. Définitions et propriétés générales**

Nous adoptons le point de vue de l'intégration de *Lebesgue* dans $\mathbb{R}^n$ (ou dans un ouvert de $\mathbb{R}^n$), basé sur la notion de mesure (de Lebesgue) des semi-intervalles dans $\mathbb{R}^n$ (ou plus généralement dans un ouvert de $\mathbb{R}^n$)

$$\mu(I) = \prod_{j=1}^n (b_j - a_j)$$

si $I =]a_1, b_1] \times \dots \times]a_n, b_n]$ (avec $a_j, b_j \in \mathbb{R}$ et $a_j < b_j$ pour tout j) et sur la notion d'intégrale des fonctions étagées¹

$$f = \sum_{l=1}^L c_l \chi_{I_l}, \quad \int f \, d\mu = \sum_{l=1}^L c_l \mu(I_l).$$

C'est à partir de ces notions, de celle de μ -mesurabilité et de celle de μ -négligeabilité qu'est définie la notion de fonction intégrable et d'intégrale d'une fonction intégrable²

Comme il a été convenu de privilégier la notion de mesure de Lebesgue (sauf mention du contraire) par rapport à tout autre mesure, c'est la notation " $dx, dy, \dots$ " qui sera utilisée en "raccourci" de la notation générale $d\mu(x), d\mu(y)$ faisant appel à une mesure générale μ .

Cela étant, rappelons que la définition de l'intégrale de Lebesgue permet de retrouver ce que l'on appelle dans ce contexte *l'interprétation de Riemann de l'intégrale*³: si f est une fonction continue sur le compact K de $\mathbb{R}^n$ alors

$$\int_K f(x) \, dx = \lim_{m \rightarrow +\infty} \sum_{l=1}^{L_m} f(x_{l,m}) \text{mes}(X_{l,m})$$

- où, pour tout $m \in \mathbb{N}$, L_m désigne un naturel strictement positif ou $+\infty$
- où, pour tout $m \in \mathbb{N}$ encore, K est l'union disjointe des ensembles mesurables $X_{l,m}$ ($l = 1, \dots, L_m$), avec $\lim_{m \rightarrow +\infty} \sup_{1 \leq l \leq L_m} \text{diam}(X_{l,m}) = 0$
- où, pour tous l, m , on a $x_{l,m} \in X_{l,m}$
- où $\text{mes}(X_{l,m}) = \int \chi_{X_{l,m}}(x) \, dx$.

Dans $\mathbb{R}$, pour $K = [a, b]$ et des partitions de $[a, b]$ en découpages dont la largeur tend vers 0, on retrouve bien l'interprétation du fait que, dans le cas où f est positif, cette intégrale est la limite de certaines sommes de surfaces de rectangles modélisant "l'aire sous la courbe représentative de f ".

¹Pour rappel, une fonction étagée est une combinaison linéaire de fonctions caractéristiques de semi-intervalles

²Rappelons l'expression de ces notions dans le cas $n = 1$ lorsque f est continu sur $I =]a, b]$; ceci s'étend au cas des autres intervalles de $\mathbb{R}$ et au cas où f est mesurable.

Si I est un intervalle fermé borné et que f y est continu, alors f y est intégrable (et son intégrale correspond à l'intégrale de Riemann-notamment).

Si f est continu sur $]a, b]$ alors f est intégrable sur cet intervalle si $\lim_{t \rightarrow a^+} \int_t^b |f(x)| dx \in \mathbb{R}$; dans ce cas, on démontre que $\lim_{t \rightarrow a^+} \int_t^b f(x) dx \in \mathbb{R}$ et on appelle intégrale de f sur $]a, b]$ la valeur de cette limite; celle-ci est notée

$$\int_a^b f(x) dx.$$

Si f est continu sur $]a, b]$, si $\lim_{t \rightarrow a^+} \int_t^b |f(x)| dx = +\infty$ et si $\lim_{t \rightarrow a^+} \int_t^b f(x) dx \in \mathbb{R}$, on écrit

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow a^+} \int_t^b f(x) dx.$$

Cette limite est appelée *intégrale fléchée de f sur $]a, b]$* .

³dans une autre présentation de la théorie, c'est cette notion qui peut être introduite en premier lieu; cette présentation, plus directe au début, est cependant beaucoup moins aisée à manipuler dans la suite, notamment dans les théorèmes généraux relatifs à l'intégration et dans la définition de l'intégrabilité et des intégrales à plusieurs variables

Signalons aussi que l'on dit que f est intégrable sur une partie mesurable A de $\mathbb{R}^n$ si $f\chi_A$ est intégrable sur $\mathbb{R}^n$. L'ensemble des fonctions intégrables sur A est noté $L^1(A)$.

2. Les critères de la convergence majorée (Lebesgue) et monotone (Levi)

Convergence monotone

Si la suite f_m ($m \in \mathbb{N}$) de fonctions intégrables et réelles sur $\mathbb{R}^n$ est croissante presque partout (resp. décroissante presque partout) et si la suite numérique $\int_{\mathbb{R}^n} f_m(x)dx$ ($m \in \mathbb{N}$) est majorée (resp. minorée), alors

- la suite f_m converge presque partout (notons f cette limite)
- cette limite est une fonction intégrable sur $\mathbb{R}^n$
- la suite f_m converge vers f dans $L^1(\mathbb{R}^n)$, ce qui signifie que la suite numérique $\int_{\mathbb{R}^n} |f_m(x) - f(x)| dx$ ($m \in \mathbb{N}$) converge vers 0. En particulier, on a $\lim_{m \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_m(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx$.

Convergence majorée

Si la suite f_m de fonctions mesurables sur $\mathbb{R}^n$ converge presque partout sur $\mathbb{R}^n$ vers f et s'il existe une fonction intégrable F telle que $|f_m| \leq F$ presque partout pour tout m , alors

- f est intégrable sur $\mathbb{R}^n$
- la suite f_m converge vers f dans $L^1(\mathbb{R}^n)$, ce qui signifie que la suite numérique $\int_{\mathbb{R}^n} |f_m(x) - f(x)| dx$ ($m \in \mathbb{N}$) converge vers 0. En particulier, on a $\lim_{m \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_m(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx$.

3. Critères pratiques d'intégrabilité ($n = 1$)

Par définition, une fonction définie presque partout sur $]a, b[\subset \mathbb{R}$ (intervalle non nécessairement borné) est intégrable en a^+ s'il existe un réel $a' \in]a, b[$ tel que f soit intégrable sur $]a, a'[$. De même, f est intégrable en b^- s'il existe un réel $b' \in]a, b[$ tel que f soit intégrable sur $]b', b[$. De la sorte, lorsque f est continu sur $]a, b[$, son intégrabilité sur $]a, b[$ est équivalente à son intégrabilité en a^+ et en b^- .

Citons tout d'abord deux cas très utiles où il est aisé de vérifier l'intégrabilité d'une fonction continue f sur $]a, b[$:

- (i) si F est intégrable sur $]a, b[$ et si $|f| \leq F$ presque partout sur $]a, b[$ alors f est intégrable sur $]a, b[$;
- (ii) si a est réel et si f admet une limite finie en a^+ , alors f est intégrable en a^+ ; de même en b^- .

De même, on obtient aisément le résultat suivant:

(iii) si f est une fonction mesurable, réelle et de signe constant sur $]a, b[$ et si elle est intégrable sur tout intervalle du type $]a', b[$ ($a' \in]a, b[$)⁴, alors f est intégrable sur $]a, b[$ si et seulement si il existe une suite décroissante a_m ($m \in \mathbb{N}$) de l'intervalle $]a, b[$ telle $a_m \rightarrow a^+$ et telle que la suite $\int_{a_m}^b f(x) dx$ ($m \in \mathbb{N}$) converge vers une limite finie. Analogie en b^- , avec une suite croissante b_m ($m \in \mathbb{N}$) de l'intervalle $]a, b[$, $b_m \rightarrow b^-$.

Les critères pratiques d'intégrabilité suivants sont basés sur le premier résultat (i) rappelé ci-dessus et sur l'intégrabilité de $x \mapsto \frac{1}{x^s}$ en 0^+ ou en $+\infty$.

Soit f une fonction continue sur $]a, b[$.

- Si $a \in \mathbb{R}$, alors f est intégrable en a^+ s'il existe $s < 1$ tel que

$$\lim_{x \rightarrow a^+} (x - a)^s |f(x)| \quad \text{existe et est fini.}$$

- Si $a = -\infty$, alors f est intégrable en $-\infty$ s'il existe $s > 1$ tel que

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} |x|^s |f(x)| \quad \text{existe et est fini.}$$

- Si $b \in \mathbb{R}$, alors f est intégrable en b^- s'il existe $s < 1$ tel que

$$\lim_{x \rightarrow a^+} (b - x)^s |f(x)| \quad \text{existe et est fini.}$$

- Si $b = +\infty$, alors f est intégrable en $+\infty$ s'il existe $s > 1$ tel que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^s |f(x)| \quad \text{existe et est fini.}$$

⁴ce qui arrive notamment si f est continu sur l'intervalle $]a, b[$ et intégrable en b^-

⁵rappelons que cette fonction est intégrable en 0^+ si et seulement si $s < 1$ et est intégrable en $+\infty$ si et seulement si $s > 1$; ce résultat est aisément démontré en utilisant (iii)

De même, on obtient des *critères de non-intégrabilité* sur $]a, b[$: si $f \in C_0(]a, b[)$, alors f n'est pas intégrable sur cet intervalle dans les cas suivants:

- $a \in \mathbb{R}$ et $\lim_{x \rightarrow a^+} (x - a)f(x)$ existe et diffère de 0
- $a = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} |x|f(x)$ existe et diffère de 0
- $b \in \mathbb{R}$ et $\lim_{x \rightarrow a^+} (b - x)f(x)$ existe et diffère de 0
- $b = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} xf(x)$ existe et diffère de 0

4. Les théorèmes de Tonelli et Fubini ($n > 1$) (on pose $n = n' + n''$, avec $n', n'' \in \mathbb{N}_0$)

Théorème de Fubini

Pour toute fonction $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$

- pour presque tout $x'' \in \mathbb{R}^{n''}$, la fonction $x' \mapsto f(x', x'')$ est intégrable sur $\mathbb{R}^{n'}$
- la fonction $x'' \mapsto \int_{\mathbb{R}^{n'}} f(x', x'') dx'$ est intégrable sur $\mathbb{R}^{n''}$
- on a

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx = \int_{\mathbb{R}^{n''}} \left(\int_{\mathbb{R}^{n'}} f(x', x'') dx' \right) dx''$$

L'hypothèse d'intégrabilité de f sur $\mathbb{R}^n$ est souvent obtenue au moyen du théorème suivant.

Théorème de Tonelli

Soit f une fonction mesurable sur $\mathbb{R}^n$. Si $x' \mapsto |f(x', x'')|$ est intégrable sur $\mathbb{R}^{n'}$ pour presque tout $x'' \in \mathbb{R}^{n''}$ et si $x'' \mapsto \int_{\mathbb{R}^{n'}} |f(x', x'')| dx'$ est intégrable sur $\mathbb{R}^{n''}$, alors f est intégrable sur $\mathbb{R}^n$.

5. Le théorème des intégrales paramétriques

Une version fréquente du théorème des intégrales paramétriques se présente comme suit.

On suppose que f est une fonction de $n + p$ variables réelles $((x, \lambda) \mapsto f(x, \lambda))$ avec $\lambda \in \Omega =$ ouvert de $\mathbb{R}^p$ et $x \in A =$ partie mesurable de $\mathbb{R}^n$. Ici, la variable x va jouer le rôle de variable d'intégration et la variable λ celui de paramètre (notons que l'on utilise aussi souvent la notation $f_\lambda(x)$). On souhaite en fait considérer la fonction

$$I : \lambda \mapsto \int_A f(x, \lambda) dx$$

et la dériver "sous le signe":

$$D_\lambda^\alpha I(\lambda) = \int_A D_\lambda^\alpha f(x, \lambda) dx.$$

(Signalons que cela peut se révéler délicat car il s'agit en fait de la permutation de deux limites.) Pour être en mesure d'affirmer que ce résultat est correct, il y a bien sûr des hypothèses naturelles, comme la dérivabilité de f par rapport à λ et l'intégrabilité en x des dérivées par rapport à λ . En plus, pour s'assurer de l'égalité des deux membres, on utilise une hypothèse du style "convergence majorée".

Voici donc un énoncé fréquemment utilisé ainsi qu'un de ses cas pratiques.

Théorème des intégrales paramétriques.

Soit f comme ci-dessus (en ce qui concerne les variables). On suppose que

- pour presque tout $x \in A$, la fonction $\lambda \mapsto f(x, \lambda)$ est de classe C_L dans Ω ,
- pour tout multi-indice α de longueur strictement inférieure à L , la fonction $x \mapsto D_\lambda^\alpha f(x, \lambda)$ est intégrable sur A ,
- pour tout multi-indice α de longueur L et pour tout compact K de $\mathbb{R}^p$ inclus dans Ω , il existe une fonction intégrable $F_{\alpha, K}$ sur A telle que

$$\sup_{\lambda \in K} |D_\lambda^\alpha f(x, \lambda)| \leq F(x) \quad \text{presque partout sur } A$$

Dans ces conditions, la fonction $I : \lambda \mapsto \int_A f(x, \lambda) dx$ est de classe C_L dans Ω et $D_\lambda^\alpha I(\lambda) = \int_A D_\lambda^\alpha f(x, \lambda) dx$ pour tout multi-indice α dont la longueur ne dépasse pas L .

Un cas très pratique est celui-ci: les hypothèses sont vérifiées lorsque A est un compact, que f est de classe C_L par rapport à λ et que les dérivées sont continues dans $A \times \Omega$.

6. Les intégrales fléchées

Soit $f \in C_0(]a, b])$. Vu la définition de l'intégrabilité, il se peut que f ne soit pas intégrable en a^+ mais que la limite $\lim_{a' \rightarrow a^+} \int_{a'}^b f(x) dx$ existe et soit finie⁶. Dans ces conditions, on dit que f admet une intégrale fléchée en a^+ et on appelle intégrale fléchée de f sur $]a, b[$ la limite ci-dessus. On écrit

$$\int_{\rightarrow a}^b f(x) dx = \lim_{a' \rightarrow a} \int_{a'}^b f(x) dx.$$

De même, si f est continu sur $[a, b[$, il se peut que f ne soit pas intégrable en b^- mais que $\lim_{b' \rightarrow b^-} \int_a^{b'} f(x) dx$ existe et soit fini. On définit l'intégrale fléchée de f en b^- de manière analogue

$$\int_a^{\rightarrow b} f(x) dx = \lim_{b' \rightarrow b^-} \int_a^{b'} f(x) dx.$$

⁶Une autre description de cette situation est la suivante: $\lim_{a' \rightarrow a} \int_{a'}^b |f(x)| dx = +\infty$ et $\lim_{a' \rightarrow a^+} \int_{a'}^b f(x) dx \in \mathbb{C}$