2ème année de bachelier en sciences physiques
ANALYSE II, 2010-2011
Révisions et transition vers le second quadrimestre

Exercice 1. Pour tout $m \in \mathbb{N}_0$, on pose

$$f_m(x) = \left(\frac{1}{m} - |x|\right) \chi_{[-1/m,1/m]}(x), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

1. Représenter f_m pour quelques valeurs de m (dans un même repère orthonormé).
2. Examiner les convergences ponctuelle et uniforme de cette suite dans $\mathbb{R}$.
3. Examiner la convergence de cette suite dans $L^1(\mathbb{R})$ et dans $L^2(\mathbb{R})$.

Exercice 2. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin(x)\chi_{]0,+\infty[}(x)$. Déterminer si possible le produit de convolution de f avec lui-même. Que vaut $(f \star f)(\pi)$?

Exercice 3. Soit $a \in \mathbb{R}$ et soit f la fonction définie par

$$f(x) = e^{-a|x-1|}, \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

1. Pour quelles valeurs de a la fonction f est-elle intégrable sur $\mathbb{R}$? Déterminer alors sa transformée de Fourier positive.
2. Pour tout $a \in \mathbb{R}_0$, déterminer la valeur de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(x)\sin(x)}{x(a^2+x^2)}\, dx.$$

Exercice 4. Déterminer le développement en série trigonométrique de Fourier dans $L^2([-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}])$ des fonctions suivantes

$$g(x) = \sin^2 x, \quad f(x) = |\sin(x)|, \qquad x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$

Exprimer le résultat en utilisant uniquement des fonctions sinus et cosinus. Déduire des calculs précédents la valeur des sommes

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{(4m^2-1)^2} \qquad \text{et} \qquad \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{4m^2-1}.$$

Exercice 5. Pour tout $m \in \mathbb{Z}$, on définit

$$f_m(x) = \frac{\sin(x - m\pi)}{x - m\pi}.$$

a) Démontrer que la suite f_m ($m \in \mathbb{Z}$) forme une suite orthogonale de $L^2(\mathbb{R})$.
b) Déterminer la norme de f_m ($m \in \mathbb{Z}$) dans $L^2(\mathbb{R})$.
c) Démontrer que $\mathrm{supp}\hat{f_m} \subseteq [-1, 1]$.

Note [1] : quand elles sont normées, ces fonctions constituent en fait une base orthonormée de l'espace des fonctions de carré intégrable (et continues) dont le support de la transformée de Fourier est inclus dans l'intervalle $[-1, 1]$. *Elles permettent en fait de retrouver un signal limité en fréquence à partir d'un échantillonnage de celui-ci. Ce résultat s'appelle le théorème d'échantillonnage de Shannon-Nyquist.*

Exercice 6. Pour tout $m \in \mathbb{N}$, la *m-ème fonction d'Hermite* est la fonction H_m définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\begin{aligned} H_0(x) &= \frac{e^{-x^2/2}}{\pi^{1/4}}, \\ H_m(x) &= \frac{e^{x^2/2}}{2^{m/2}(m!)^{1/2}\pi^{1/4}} D^m e^{-x^2}, \quad \forall m \in \mathbb{N}_0. \end{aligned}$$

En remarquant que la fonction H_m ($m \in \mathbb{N}$) est une fonction du type $e^{-x^2/2}P(x)$ où P est un polynôme sur $\mathbb{R}$ de degré m, démontrer que la suite $(H_m)_{m\in\mathbb{N}}$ des fonctions d'Hermite est orthogonale dans $L^2(\mathbb{R})$.

Exercice 7. Répondre aux questions suivantes avec justifications.

1. Le carré d'un nombre complexe est-il toujours un nombre réel positif ?
2. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Déterminer les parties réelle et imaginaire des nombres complexes suivants :
$$\text{a)}\frac{1}{i^3}, \qquad \text{b)}\frac{1}{\cos(\alpha) + i\sin(\alpha)}, \qquad \text{c)}e^{i(\alpha+1/2)}, \qquad \text{d)}\frac{1}{1+i\alpha}.$$
3. Résoudre les équations suivantes (z est une variable complexe)
$$z^2-1=0, \qquad z^3-1=0, \qquad z^4-1=0, \qquad z^2+1=0, \qquad z^3+1=0, \qquad z^4+1=0.$$
4. La fonction $t \mapsto e^{i\pi t}$ appartient-elle à $L^1(\mathbb{R})$, $L^2(\mathbb{R})$ et/ou $L^\infty(\mathbb{R})$?
5. Soit f une fonction de carré intégrable sur $\mathbb{R}$ et g une fonction bornée sur $\mathbb{R}$. Alors

– fg est de carré intégrable sur $\mathbb{R}$	Vrai ☐	Faux ☐
– fg est intégrable sur $\mathbb{R}$	Vrai ☐	Faux ☐
– fg est intégrable sur $[a, b]$ ($a < b$)	Vrai ☐	Faux ☐
– fg est bornée sur $\mathbb{R}$	Vrai ☐	Faux ☐

6. La transformée de Fourier d'une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles est-elle encore à valeurs réelles ? Si oui, pourquoi ? Sinon, qu'en est-il si f est pair ?
7. Existe-t-il une fonction f intégrable sur $\mathbb{R}$ telle que
$$\mathcal{F}_y^- f = \frac{y^2}{1+y^2}, \ y \in \mathbb{R} \ ?$$

1. Pour plus d'informations au sujet de l'échantillonnage de Nyquist-Shannon, le lecteur intéressé pourra consulter par exemple `http://www.afo.ulg.ac.be/fb/ens/2007-2008/a2p1/GibbsShannon.pdf`.