2ème année de bachelier en sciences physiques
ANALYSE II
Séries trigonométriques de Fourier

Exercice 1.

1. On se place dans l'espace $L^2([-1,1])$ muni du produit scalaire habituel. Pour tout $m \in \mathbb{N}_0$, déterminer le produit scalaire des fonctions f et g_m définies par
$$f(x) = \sin(\pi x) \quad \text{et} \quad g_m(x) = \sin(\pi m x).$$
2. Dans l'espace $L^2([-1,1])$, on a le développement suivant
$$x = \sum_{m=1}^{+\infty} a_m \sin(\pi m x).$$
En prenant le produit scalaire des deux membres de l'égalité avec la fonction $x \mapsto \sin(\pi x)$, déterminer la valeur de a_1.

Exercice 2. On donne la fonction
$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x \in]-\pi, 0[, \\ 1 & \text{si } x \in]0, \pi[, \\ 0 & \text{sinon .} \end{cases}$$

1. Déterminer le développement en série trigonométrique de Fourier de cette fonction dans $L^2([-\pi,\pi])$ en simplifiant la réponse au maximum ; la réponse finale ne doit comporter que des fonctions sinus et cosinus.
2. En déduire que
$$\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{(2m+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Exercice 3. On se place dans $L^2([0,\pi])$.

1. Déterminer le développement en série trigonométrique de Fourier de $f(x) = \sin(x)$ en simplifiant la réponse au maximum ; la réponse finale ne doit comporter que des fonctions sinus et cosinus.
2. En déduire l'égalité suivante
$$\frac{\pi}{2} = 1 - 2\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{4m^2-1}.$$