ANALYSE II, 2009-2010, 2e bachelier sciences physiques
Solutions aux exercices du TD 1
Version : 19 Mai 2010

1. a) On a

$$|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\cos((2k+1)x)}{(2k+1)^2} \quad \text{dans } L^2[-\pi,\pi].$$

   b) Il suffit d'appliquer la formule de Parseval.

2. On a

$$\int_\gamma x\, dx = 2\pi^2, \qquad \int_\gamma x\, dy = -3\pi.$$

3. Après application de la formule de Taylor, il vient

$$\mathrm{Log}(1+z) = \sum_{m=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{m+1}}{m}z^m$$

   pour tout $z \in \mathbb{C}$ vérifiant $|z| < 1$.

4. (a) $\int_\gamma \frac{1}{z-i}dz = 2i\pi$;
   (b) $\int_\gamma \frac{1}{(z-i)^2}dz = 0$;
   (c) $\int_\gamma \frac{1}{(z+1+i)}dz = 0$;
   (d) $\int_\gamma \frac{\tan(z)}{(z^2-1)}dz = 2i\pi\tan(1)$.

5. a) Les fonctions f_1 et f_2 sont holomorphes sur $\mathbb{C}_0$, f_3 est holomorphe sur $\mathbb{C}\setminus(]-\infty,-1]\cup\{0\})$.
   b) Les fonctions f_1 et f_3 n'ont aucun zéro. Les zéros de f_2 sont les $2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}_0$ et sont tous de multiplicité 2.
   c) L'unique singularité isolée de f_1, f_2 et f_3 est 0. Elle est de type essentielle pour f_1, est un pôle d'ordre 1 pour f_2, et est un pôle d'ordre 0 pour f_3.
   d) Le résidu en 0 pour f_1 vaut $\frac{1}{2}$, celui pour f_2 vaut $\frac{1}{2}$ et celui pour f_3 est nul.

ANALYSE II, 2009-2010, 2e bachelier sciences physiques
Solutions aux exercices du TD 2
Version : 19 Mai 2010

1. a) La suite f_m ($m \in \mathbb{N}_0$) converge ponctuellement vers 0 sur $\mathbb{R}$ mais ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}$.
   b) La suite g_m ($m \in \mathbb{N}_0$) converge ponctuellement vers 0 sur $\mathbb{R}$ mais ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}$. Cependant, elle converge uniformément sur tous les intervalles du type $]-\infty, r]$ où $r > 0$.

2. Il vient
$$f * g(x) = \sin(x) \quad (x \in \mathbb{R}).$$

3. On a
$$f_\lambda * f_\mu(t) = \mathrm{sign}(\lambda\mu) f_{\sqrt{\lambda^2+\mu^2}}(t)$$
pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}_0$.

4. Désignons par
$$f : x \mapsto i\,\pi\,\mathrm{sign}(x) e^{-|x|}$$
la fonction donnée dans l'énoncé. Nous pouvons en calculer sa transformée de Fourier dans L^1 et il vient
$$\mathcal{F}_y^{\pm} f = \mp \frac{2\pi y}{1+y^2}.$$
Posons $g : x \mapsto \frac{x}{1+x^2}$. Nous pouvons déduire de ce qui précède la transformée de Fourier dans L^2 de g et il vient après justifications
$$\mathbb{F}_z^{\pm} g = \pm f(z) \quad pp.$$