Travail dirigé – Révisions

Exercice 1. Pour tout $m \in \mathbb{N}_0$, on pose

$$f_m(x) = \frac{\sqrt{m}}{1+m^2x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

(a) Déterminer l'ensemble A des réels sur lequel cette suite converge ponctuellement ainsi que sa limite.

(b) Etudier la convergence uniforme de cette suite sur A et sur les compacts inclus dans A.

(c) Etudier la convergence de cette suite dans $\mathrm{L}^1(A)$, $\mathrm{L}^2(A)$ et $\mathrm{L}^\infty(A)$.

Exercice 2. Pour tout $m \in \mathbb{N}_0$, on pose

$$f_m(x) = \frac{e^x x^m}{m!}\chi_{]0,+\infty[}(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Pour tous $m, n \in \mathbb{N}_0$, calculer si possible $f_m \star f_n$ et f_{m+n+1} et comparer ces fonctions.

Exercice 3. Soit $a \in \mathbb{R}$ et soit f la fonction définie par

$$f(x) = e^{-a|x-1|}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

(a) Pour quelles valeurs de a la fonction f est-elle intégrable sur $\mathbb{R}$? Déterminer alors sa transformée de Fourier positive.

(b) Pour tout $a \in \mathbb{R}_0$, déterminer la valeur de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(x)\sin(x)}{x(a^2+x^2)}\, dx.$$

Exercice 4. Déterminer la transformée de Fourier négative de la fonction

$$x \mapsto \frac{1-\cos(x)}{x}\chi_{\mathbb{R}_0}(x).$$

Exercice 5. Soit la fonction impaire f définie sur $[-\pi, \pi]$ par $f(x) = x(\pi - x)$ si $x \in [0, \pi]$.

(a) Développer si possible cette fonction en série trigonométrique de Fourier dans $\mathrm{L}^2([-\pi, \pi])$. Exprimer votre réponse en utilisant uniquement des fonctions sinus et cosinus et simplifier au maximum vos calculs.

(b) En déduire la valeur des séries

$$\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)^3} \quad \text{et} \quad \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{(2m+1)^6}.$$

Exercice 6. Soit $f \in \mathrm{C}_1([0, 2\pi])$ une fonction à valeurs réelles telle que $f(0) = f(2\pi)$ et $\int_0^{2\pi} f(t)\, dt = 0$.

(a) Montrer que

$$\int_0^{2\pi} (f(t))^2\, dt \le \int_0^{2\pi} (Df(t))^2\, dt.$$

(b) Montrer que l'égalité a lieu si et seulement si $f = a\cos + b\sin$ avec $a, b \in \mathbb{R}$.

L. Simons & F. Bastin – 12 décembre 2011