Analyse II, partie 1 – Travail dirigé

Exercice 1. Pour tout $m \in \mathbb{N}_0$, on pose

$$f_m(x) = \left(\frac{1}{m} - |x|\right) \chi_{[-1/m,1/m]}, \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

1. Représenter f_m pour quelques valeurs de m (dans un même repère orthonormé).
2. Examiner les convergences ponctuelles et uniformes de la suite $(f_m)_{m\in\mathbb{N}_0}$.
3. Examiner la convergence de cette suite dans $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ et $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$.

Exercice 2. Pour tout $m \in \mathbb{N}_0$, on pose

$$\delta_m(x) = \frac{m}{\sqrt{\pi}}\, e^{-m^2x^2}, \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

(a) Examiner la convergence ponctuelle et uniforme sur $\mathbb{R}$ de la suite $(\delta_m)_{m\in\mathbb{N}_0}$.

(b) Les fonctions δ_m sont-elles dans $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$, dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ et/ou dans $\mathrm{L}^\infty(\mathbb{R})$? Si c'est le cas, examiner la convergence de la suite dans les espaces auxquels les fonctions appartiennent.

(c) Montrer que pour tout $m \in \mathbb{N}_0$, on a

$$\int_{\mathbb{R}} \delta_m(x)\, dx = 1.$$

Exercice 3. Soit la fonction h définie par

$$h(x) = \frac{1}{1+|x|}, \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Cette fonction appartient-elle à $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$, $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ et $\mathrm{L}^\infty(\mathbb{R})$? Si oui, en déterminer les normes correspondantes.

Exercice 4. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin(x)\chi_{]0,+\infty]}(x)$. Déterminer si possible le produit de convolution de f avec lui-même. Que vaut $(f \star f)(\pi)$?

Exercice 5. Soient les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = e^{-x}\chi_{]0,+\infty[}(x) \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{1}{1-ix}.$$

(a) Ces fonctions f et g appartiennent-elles $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$, $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ et $\mathrm{L}^\infty(\mathbb{R})$? Si oui, en déterminer les normes correspondantes.

(b) Si possible, déterminer $f \star f$ ainsi que la transforme de Fourier positive de f et de $f \star f$.

(c) Montrer que la transforme de Fourier négative de g est nulle sur $]-\infty, 0[$.

(d) Déterminer la norme de la transforme de Fourier positive de f.

Exercice 6. Soit la fonction f définie sur $[-\pi, \pi]$ par $f(x) = |x|$.

(a) Développer cette fonction en série trigonométrique de Fourier dans $\mathrm{L}^2([-\pi, \pi])$. Exprimer votre réponse en utilisant uniquement des fonctions sin et cos et simplifier les calculs au maximum.

(b) En déduire la valeur des sommes

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^4}.$$

Exercice 7. Pour tout $m \in \mathbb{Z}$, on pose

$$f_m(x) = \frac{\sin(x - m\pi)}{x - m\pi}.$$

1. Démontrer que la suite $(f_m)_{m\in\mathbb{Z}}$ forme une suite orthogonale dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$.
2. Déterminer la norme de f_m $(m \in \mathbb{Z})$ dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$.
3. Démontrer que $\mathrm{supp}(\hat{f}_m) \subseteq [-1, 1]$.