Analyse II, partie 1 – Travail dirigé 1

Exercice 1. Soit la fonction h définie par

$$h(x) = \frac{1}{1+|x|}, \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Cette fonction appartient-elle à $L^1(\mathbb{R})$, $L^2(\mathbb{R})$ et $L^\infty(\mathbb{R})$? Si oui, en déterminer alors les normes correspondantes.

Exercice 2. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (1-|x|)\,\chi_{[-1,1]}(x)$. Pour tout $m \in \mathbb{N}_0$, on pose

$$F_m(x) = f(mx), \quad G_m(x) = mf(mx) \quad \text{et} \quad H_m(x) = f\left(\frac{x}{m}\right).$$

(a) Représenter F_m, G_m et H_m pour quelques valeurs de m (dans un même repère orthonormé).

(b) Exmainer la convergence ponctuelle de ces suites sur $\mathbb{R}$.

(c) Examiner la convergence uniforme de ces suites sur $[0,+\infty[$, sur $]0,+\infty[$ et sur les intervalles compacts de $]0,+\infty[$.

(d) Examiner la convergence de ces suites dans $L^1(]0,+\infty[)$.

Exercice 3. Pour tout $m \in \mathbb{N}$, on pose

$$f_m(x) = \frac{x^m}{m}, \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

(a) Déterminer (si possible) la norme de f_m dans $L^1([-1,1])$, $L^2([-1,1])$ et $L^\infty([-1,1])$ pour tout $m \in \mathbb{N}_0$.

(b) On considère la série

$$\sum_{m=0}^{+\infty} f_m.$$

(1) Sur quel intervalle I (le plus grand possible) la série converge-t-elle ponctuellement ?

(2) Etudier la convergence uniforme de cette série sur I et ces sous-intervalles.

(3) Etudier la convergence de la série dans $L^1([-1,1])$ et $L^2([-1,1])$.

Exercice 4. Soit E une partie mesurable de $\mathbb{R}^n$. Si on a $f_m \to f$ dans $L^2(E)$ et $g_m \to g$ dans $L^\infty(E)$, montrer que $f_m g_m \to fg$ dans $L^2(E)$.

Exercice 5. (a) Calculer la valeur de $\Gamma(7/2)$.

(b) Montrer que, pour tout $x > 0$, on a

$$(D\Gamma(x))^2 \leq \Gamma(x)\, D^2\Gamma(x).$$

Exercice 6. Pour tout $n \in \mathbb{N}_0$, on pose

$$\delta_n(x) = \frac{n}{\sqrt{\pi}}\, e^{-n^2x^2}, \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

(a) Examiner la convergence ponctuelle et uniforme sur $\mathbb{R}$ de la suite δ_n ($n \in \mathbb{N}_0$).

(b) Les fonctions δ_n sont-elles dans $L^1(\mathbb{R})$, dans $L^2(\mathbb{R})$ et/ou dans $L^\infty(\mathbb{R})$? Si c'est le cas, examiner la convergence de la suite dans les espaces auxquels les fonctions appartiennent.

(c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}_0$, on a

$$\int_{\mathbb{R}} \delta_n(x)\, dx = 1.$$

(d) Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} \delta_n(x)\varphi(x)\, dx = \varphi(0)$$

pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

L. Simons & F. Bastin – 21 octobre 2010.