Analyse II, partie 1 – Travail dirigé 2

Exercice 1. Pour tout $m \in \mathbb{N}_0$, on pose

$$f_m(x) = \frac{\sqrt{m}}{1+m^2x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

(a) Déterminer l'ensemble A des réels sur lequel cette suite converge ponctuellement ainsi que sa limite.

(b) Etudier la convergence uniforme de cette suite sur A et sur les compacts inclus dans A.

(c) Etudier la convergence de cette suite dans $\mathrm{L}^1(A)$, $\mathrm{L}^2(A)$ et $\mathrm{L}^\infty(A)$.

Exercice 2. Pour tout $m \in \mathbb{N}_0$, on pose

$$f_m(x) = \frac{e^x x^m}{m!} \chi_{]0,+\infty[}(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Pour tous $m, n \in \mathbb{N}_0$, calculer si possible $f_m \star f_n$ et f_{m+n+1} et comparer ces fonctions.

Exercice 3. Déterminer la transformée de Fourier négative de la fonction

$$x \mapsto \frac{1-\cos(x)}{x} \chi_{\mathbb{R}_0}(x).$$

Exercice 4. Soient les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = e^{-x} \chi_{]0,+\infty[}(x) \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{1}{1-ix}.$$

(a) Ces fonctions f et g appartiennent-elles à $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$, $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ et $\mathrm{L}^\infty(\mathbb{R})$? Si oui, en déterminer la norme.

(b) Si possible, déterminer $f \star f$ ainsi que la transformée de Fourier positive de f et de $f \star f$.

(c) Montrer que la transformée de Fourier négative de g est nulle sur $]-\infty, 0[$.

(d) Déterminer la norme de la transformée de Fourier positive de f.

Exercice 5. Soit la fonction f donnée sur $[-\pi, \pi]$ par $f(x) = |x|$.

(a) Développer cette fonction en série trigonométrique de Fourier dans $\mathrm{L}^2([-\pi, \pi])$. Exprimer votre réponse en utilisant uniquement des fonctions sin et cos et simplifier les calculs au maximum.

(b) En déduire la valeur des sommes

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^4}.$$

Exercice 6. Pour tout $t > 0$, on pose $f_t(x) = x^{t-1} e^{-x} \chi_{]0,+\infty[}$, $x \in \mathbb{R}$.

(a) Montrer que, pour tout $t > 0$, la fonction $F_t = \mathcal{F}^- f_t$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et vérifie l'équation différentielle

$$D_\xi F_t(\xi) + \frac{it}{1+i\xi} F_t(\xi) = 0, \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

(b) En déduire que

$$F_t(\xi) = \Gamma(t) \exp\left(-t\left(\frac{1}{2}\ln(1+\xi^2) + i \operatorname{arctg}(\xi)\right)\right), \quad \xi \in \mathbb{R},$$

pour tout $t > 0$.

(c) En déduire que

$$\frac{f_s}{\Gamma(s)} \star \frac{f_t}{\Gamma(t)} = \frac{f_{s+t}}{\Gamma(s+t)}$$

pour tous $s, t > 0$.

Exercice 7. Pour chaque nombre complexe λ tel que $\Re\lambda < 0$, on introduit la fonction f_λ définie sur $\mathbb{R}$ par
$$f_\lambda(x) = e^{\lambda x}\,\chi_{[0,+\infty[}(x).$$

(a) Montrer que f_λ est intégrable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa transformée de Fourier négative.

(b) Montrer que
$$f_a \star f_b = \frac{f_a - f_b}{a-b}$$
pour tous $a, b \in \mathrm{C}$ tels que $\Re a < 0$, $\Re b < 0$ et $a \neq b$.

(c) Soit c un nombre réel strictement positif. On définit la fonction F_c sur $\mathbb{R}$ par
$$F_c(x) = 2c\,e^{-cx}\,\sin(cx)\,\chi_{[0,+\infty[}(x).$$
Calculer la transformée de Fourier négative de F_c et vérifier que $\mathcal{F}_0^- F_c = 1$.

(d) Pour un signal u intégrable et de carré intégrable sur $\mathbb{R}$ et pour $\xi > 0$, on introduit la quantité
$$E_\xi(u) = \left[\int_{\mathbb{R}} \chi_{\{t\in\mathbb{R}:|t|>\xi\}}(y)\,\left|\mathcal{F}_y^- u\right|^2\,dy\right]^{1/2}$$
qui mesure l'énergie correspondant aux pulsations supérieures à ξ contenues dans le signal u. On filtre le signal u en le convolant avec la fonction F_c, obtenant ainsi le signal
$$v = u \star F_c\,.$$
Montrer que
$$E_\xi(v) \leq \frac{2c^2}{\sqrt{\xi^4 + 4c^4}}\,E_\xi(u).$$

Suggestion. Pour (c), écrire F_c comme combinaison linéaire de fonctions f_λ.

Exercice 8. On se place dans l'espace $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ muni de son produit scalaire habituel.

(a) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par
$$f(x) = (1-|x|)\,\chi_{[-1,1]}(x).$$
Calculer la transformée de Fourier négative de f.

(b) Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on pose $f_n(x) = f(x-n)$.

(1) Calculer la transformée de Fourier négative de f_n.

(2) Sur un même schéma, représenter les graphiques de f_0, f_1 et f_2.

(3) Calculer les produits scalaires $\langle f_0, f_0\rangle$ et $\langle f_0, f_1\rangle$, puis $\langle f_0, f_k\rangle$ pour $k \geq 2$. Montrer que $\langle f_n, f_{n+p}\rangle$ ne dépend que de p.

(c) (1) Déterminer le réel $a \in\,]-1, 0[$ pour que les fonctions f_1 et $f_0 + af_1 + a^2 f_2$ soient orthogonales.

(2) Montrer que la série
$$g = \sum_{k=0}^{+\infty} a^k f_k$$
converge uniformément sur $\mathbb{R}$ et converge dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$.

(3) Montrer que g est orthogonal à f_p pour tout $p \in \mathbb{N}_0$ et calculer la transformée de Fourier négative de g.