

Répétition du cours d'Analyse II
2ème BP
29 Avril 2010

1. Soit la fonction f donnée sur $[-\pi, \pi]$ par

$$f(x) = |x|.$$

- (a) Développer cette fonction en série trigonométrique de Fourier dans $L^2([-\pi, \pi])$. Exprimer votre réponse en utilisant uniquement des fonctions sin et cos et simplifier les calculs au maximum.

- (b) En déduire

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}.$$

2. Calculer si possible les intégrales suivantes

$$\int_{\gamma} x dx, \quad \int_{\gamma} x dy$$

où γ désigne un paramétrage de l'arcade de cycloïde :

$$\gamma(t) = (t - \sin(t), 1 - \cos(t)), t \in [0, 2\pi].$$

3. Développer $\text{Log}(1+z)$ en série de puissances au voisinage de 0 (naturelles ou entières à préciser) et préciser l'ensemble dans lequel le développement a lieu.

4. Calculer si possible l'intégrale $\int_{\gamma} f(z) dz$ où

- (a) $f(z) = \frac{1}{(z-i)}$ et γ désigne un paramétrage injectif et régulier de la circonférence centrée en i et de rayon 1, orienté "aire à gauche" ;

- (b) $f(z) = \frac{1}{(z-i)^2}$ et γ désigne un paramétrage injectif et régulier de la circonférence centrée en i et de rayon 1, orienté "aire à gauche" ;

- (c) $f(z) = \frac{1}{(z+1+i)}$ et γ désigne un paramétrage injectif et régulier par morceaux du bord du carré de sommets 0, 3, $3i$, $3+3i$ orienté "aire à gauche" ;

- (d) $f(z) = \frac{\tan(z)}{(z^2-1)}$ et γ désigne un paramétrage injectif et régulier de la circonférence centrée en 0 et de rayon $\frac{3}{2}$, orienté "aire à gauche".

5. On donne explicitement les fonctions suivantes

$$f_1(z) = ze^{1/z}, \quad f_2(z) = \frac{1 - \cos(z)}{z^3}, \quad f_3(z) = \frac{\text{Log}(z+1)}{z}.$$

- a) Où ces fonctions sont-elles holomorphes ?
b) Quels ont leurs zéros ainsi que leurs multiplicités ?
c) Quelles ont les singularités isolées ? De quels types sont-elles ?
d) Déterminer le résidu en chacune des singularités isolées.