

2007-2008

Exercices pour un travail dirigé (TD)

Novembre 2007

Question 1

Soit un signal f (on suppose que cette fonction est intégrable et de carré intégrable). On définit l'autocorrélation du signal par

$$E_f(t) = \int_{\mathbb{R}} f(x) \overline{f(x-t)} dx, \quad t \in \mathbb{R}$$

et la *densité spectrale de puissance* de ce signal (PSD) par

$$D_f(y) = \left| \widehat{f}(y) \right|^2, \quad y \in \mathbb{R}$$

où $\widehat{f}(y)$ désigne la transformée de Fourier négative de f en y . On pose $f^s(x) = \overline{f(-x)}$, $x \in \mathbb{R}$.

- Montrer que l'autocorrélation s'écrit

$$E_f = f * f^s$$

- Montrer que l'autocorrélation d'une fonction à valeurs réelles est une fonction paire
- Montrer que

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} |E_f(t)| = E_f(0).$$

- Montrer que la densité spectrale et l'autocorrélation sont reliées par la transformation de Fourier (l'une est la transformée de l'autre).

Question 2

Si possible, déterminer le produit de composition des fonctions f et g suivantes

$$f(x) = |x|, \quad x \in \mathbb{R} \quad g(x) = \frac{1}{(1+x^2)^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Question 3

On considère $f(x) = \frac{\cos x}{x}$, $x \in [1, +\infty[$. Montrer que cette fonction n'est pas intégrable sur cet intervalle mais qu'elle admet une intégrale fléchée en $+\infty$. Suggestion: on sait que la fonction (non intégrable à l'infini) $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ admet une intégrale fléchée à l'infini.

Question 4

Soit la fonction

$$g(x) = \frac{1 - \cos x}{x}, \quad x \neq 0, \quad g(0) = 0.$$

Montrer que cette fonction est continue sur $\mathbb{R}$, appartient à $L^2(\mathbb{R})$ mais pas à $L^1(\mathbb{R})$. En déterminer ensuite la transformée de Fourier (négative).

Question 5

On donne les fonctions suivantes

$$f_1(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}, \quad f_2(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \\ -e^x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

$$f_3(x) = e^{-|x|} (x \in \mathbb{R}), \quad f_4(x) = \frac{1}{1+ix} = \frac{1-ix}{1+x^2} (x \in \mathbb{R}).$$

- Déterminer la transformée de Fourier (-) de f_1, f_2, f_3 , en spécifiant s'il s'agit de la transformée dans L^1 ou L^2 .
- Déterminer la transformée de Fourier (+) de f_4 , en spécifiant s'il s'agit de la transformée dans L^1 ou L^2 . Montrer que cette transformée est nulle sur $] -\infty, 0[$.
- Déterminer (si possible) le produit de composition $f_1 * f_1$ ainsi que sa transformée de Fourier (-).

Question 6

Soit une fonction $u = u(x, t)$ ($x \in \mathbb{R}, t \geq 0$) de classe C_2 dont les dérivées partielles jusqu'à l'ordre 2 sont intégrables par rapport à x sur $\mathbb{R}$ quel que soit t . Soit aussi une constante strictement positive v .

On suppose que u vérifie l'équation

$$D_t u(x, t) = v^2 D_x^2 u(x, t), \quad t \geq 0, x \in \mathbb{R}.$$

On pose

$$f(x) = u(x, 0), \quad \widehat{f} = \mathcal{F}^- f$$

et on définit la fonction

$$F(y, t), \quad t \geq 0, y \in \mathbb{R}$$

de telle sorte que, pour t fixé, $F(y, t)$ soit la transformée de Fourier (négative) en y de la fonction $x \mapsto u(x, t)$.

1. Montrer que pour tout y , la fonction $t \mapsto F(y, t)$ vérifie

$$D_t F(y, t) + v^2 y^2 F(y, t) = 0.$$

2. Dédire du point précédent que l'on a

$$F(y, t) = \widehat{f}(y) e^{-v^2 y^2 t}.$$

3. Dédire de ce qui précède que l'on a finalement

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} f\left(x + 2v\sqrt{t}y\right) e^{-y^2} dy, \quad x \in \mathbb{R}, t \geq 0.$$

Suggestions: transformation de Fourier dans L^1 et propriétés, transformée de Fourier des gaussiennes, produit de composition et transformation de Fourier.

Question 7

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$, telle que $x \mapsto x^2 f(x)$ soit borné sur $\mathbb{R}$. Démontrer que

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} f(x+m) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}_{2\pi m}^- f e^{2i\pi m x}$$

En déduire que

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x+m)^2} = \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi x)}, \quad x \notin \mathbb{Z}.$$

Question 8

Le document ci-joint a été récupéré sur le web. Il s'agit donc d'un document destiné à une première approche des séries de Fourier, pour "faire comprendre" ce dont il s'agit. D'un point de vue mathématique, il faut donc y apporter toutes les nuances possibles.

Avec les éléments d'analyse de Fourier présentés au cours, certaines phrases (certaines affirmations) floues du document peuvent être précisées correctement. On demande de

- relever les imprécisions les plus flagrantes
- expliquer les notions correctes que l'on peut introduire pour lever ces imprécisions et, dans la mesure du possible, expliquer exactement ce dont il s'agit

[Accueil](#) / [Dictionnaire](#) / [Rubriques](#) / [Index](#) / [Références](#) / ***[Nouveautés](#)
 => [_ORIENTATION GÉNÉRALE_](#) - [M'écrire](#) - Édition du: 09/11/2003

-Y- Rubrique: **Série de Fourier**

Sommaire de cette page

>>> **APPROCHE**
 >>> **CRÉNEAU en Fourier**
 >>> **Autres EXEMPLES**
 >>> **HISTORIQUE**
 >>> **THÉORIE**
 >>> **DROITE en Fourier**

Pages voisines

- [Fourier Bio](#)
- [Exposants Index](#)
- [Exposants et puissances](#)
- [Constantes Mathématiques](#)
- [Constantes de l'univers](#)

SÉRIE DE FOURIER **TRANSFORMÉE DE FOURIER**

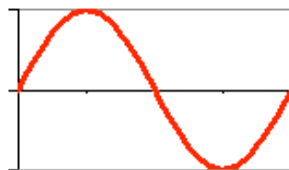
- Outil pratique qui permet de faire des calculs sur des fonctions bizarroïdes
- Ces fonctions sont transformées en sommes de fonctions périodiques (sinus et cosinus) plus simples
- Il est plus facile de connaître les propriétés de la fonction en analysant les propriétés de chacune des composantes
- Encore une histoire de [changement de monde](#) ...

Anglais : Fourier Series / Fourier Transform

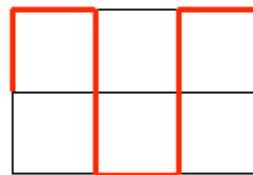
-Y- APPROCHE

Des formes d'onde très différentes

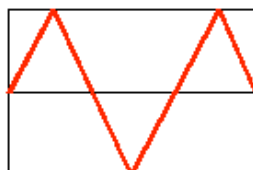
Sinusoïdale



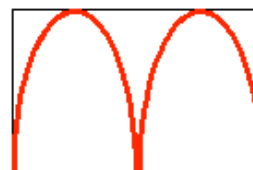
En créneau



En dents de scie



En arc de cercle

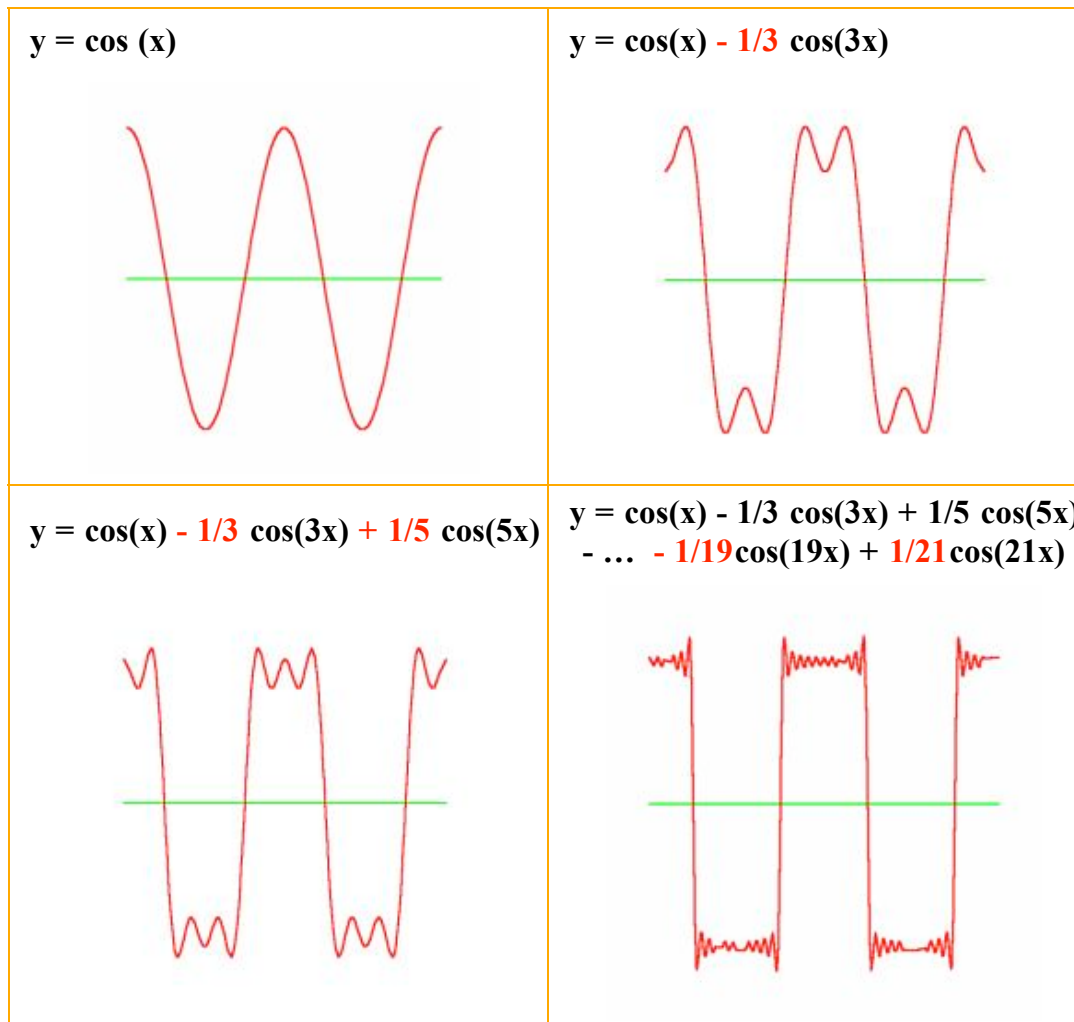


- Seule la forme sinusoïdale peut être représentée sous la forme d'une fonction

$$y = a \cdot \sin(x)$$

- Pas possible pour les autres
- Les transformées de Fourier le permettent
- Ce sont des suites infinies de fonctions sinusoïdales
- Qui sommées, tendent vers la fonction à définir

-Y- CRÉNEAU en Fourier



Conclusion

- En continuant à ajouter des fonctions cosinus, et
- Avec les coefficients **impairs successifs**,
- Alternativement **négatifs et positifs**,
- On se rapproche de plus en plus de la *courbe créneau*

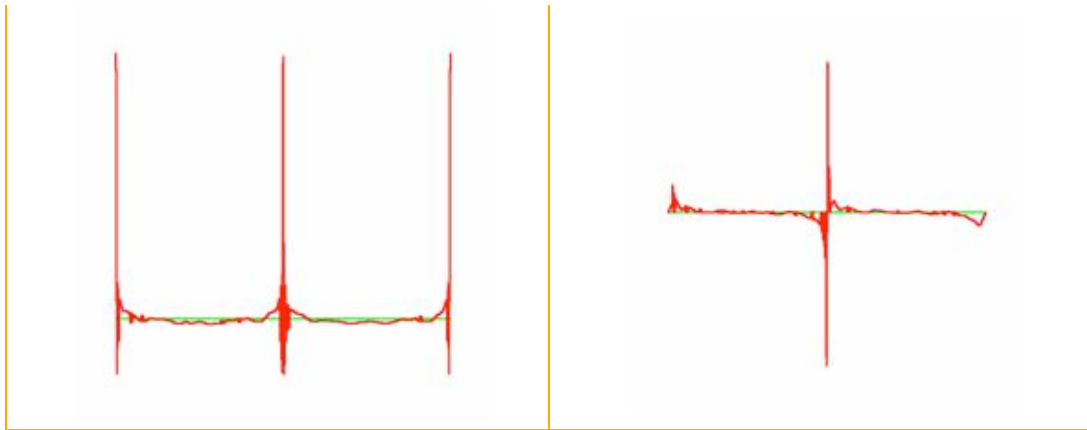
Voir ▪ [Série de Wallis](#)

-Y- Autres EXEMPLES

Avec des sinus et cosinus simplement

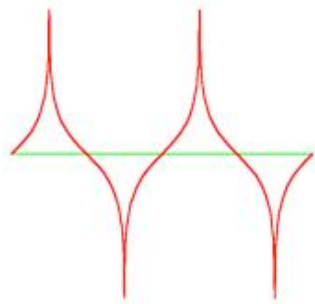
$$y = \cos(x) + \cos(2x) + \cos(3x) + \dots$$

$$y = \sin(x) + \sin(2x) + \sin(3x) + \dots$$

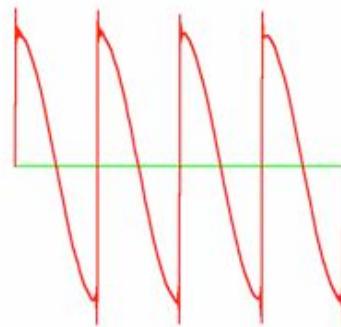


Autres exemples

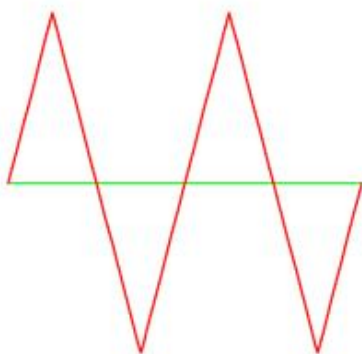
$$y = \sin(x) \\ - \frac{1}{3} \sin(3x) \\ + \frac{1}{5} \sin(5x) \\ - \dots$$



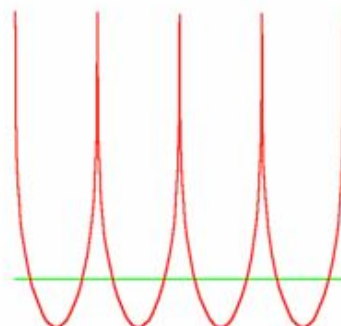
$$y = \frac{2}{(1 \times 3)} \sin(2x) \\ + \frac{4}{(3 \times 5)} \sin(4x) \\ + \frac{6}{(5 \times 7)} \sin(6x) \\ + \dots$$



$$y = \sin(x) \\ - \frac{1}{3^2} \sin(3x) \\ + \frac{1}{5^2} \sin(5x) \\ - \dots$$



$$y = \frac{2}{(1 \times 3)} \cos(2x) \\ + \frac{4}{(3 \times 5)} \cos(4x) \\ + \frac{6}{(5 \times 7)} \cos(6x) \\ + \dots$$



-Y- HISTORIQUE

- Fourier est connu pour ses travaux pour la chaleur
- Il trouve une [équation](#) avec des dérivées qu'il faut résoudre

- Il trouve une manière générale de la résoudre
- Elle est si générale qu'elle donne cet outil formidable

La transformée de Fourier

- Et plus récemment avec les besoins des ordinateurs

La transformée de Fourier rapide

FFT: Fast Fourier Transform

Ce que disait Fourier

- "Ce mouvement peut toujours être décomposé en plusieurs autres
- dont chacun s'accomplit comme s'il avait lieu seul
- Cette superposition des effets simples est un des éléments fondamentaux de la théorie de la chaleur"
- "Cette remarque est essentielle, en ce qu'elle conduit à connaître comment les fonctions entièrement arbitraires
- peuvent ainsi être développées en séries de sinus d'arc multiples"

*Biblio très complète
sur ce sujet*

- [Fourier - Créateur de la physique mathématique](#)

-Y- THÉORIE

Série de Fourier

- | | | |
|---|---|---|
| <ul style="list-style-type: none"> ▪ Une fonction périodique $f(x)$ ▪ Elle peut être développée en série de Fourier ▪ Elle comporte 3 éléments: | <ul style="list-style-type: none"> ▪ Un terme constant a_0, appelé composante continue ▪ Une composante fondamentale caractérisée par les valeurs de a_1 et b_1 ▪ Des harmoniques (<i>multiples de la fréquence fondamentale</i>) caractérisées par les valeurs des autres coefficients de Fourier: a_n et b_n | $f(x) =$ a_0 $+ a_1 \cos x + b_1 \sin x$ $+ a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x$ $+ \dots$ $+ \mathbf{a_n \cos nx + b_n \sin nx}$ $+ \dots$ |
|---|---|---|
-
- | | |
|--|---|
| <ul style="list-style-type: none"> ▪ Coefficients de Fourier ▪ Qui se prêteraient bien à une interprétation en nombres complexes ▪ L'outil correspondant est appelé transformée de Fourier ▪ Détermination des coefficients ▪ Formule d'Euler - Fourier | $a_n \text{ et } b_n \text{ nombres réels}$ $c_n = a_n e^{+i} \cdot b_n$ $\hat{f}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-itx} dx$ $a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$ |
|--|---|

- Dans l'intervalle
(-p, p)

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx$$

-Y- DROITE en Fourier

- Fonction

$f(x) = x$ dans l'intervalle $(-p < x < p)$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x dx = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{x^2}{2} \right]_{-\pi}^{\pi} = 0$$

- Détermination
des
coefficients

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \left[x \cdot \frac{\sin nx}{n} \right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{\pi} \left[-\frac{\cos nx}{n^2} \right]_{-\pi}^{\pi} = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin nx dx = \frac{1}{\pi} \left[x \left(-\frac{\cos nx}{n} \right) \right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{\pi n} \left[\frac{\sin nx}{n} \right]_{-\pi}^{\pi}$$

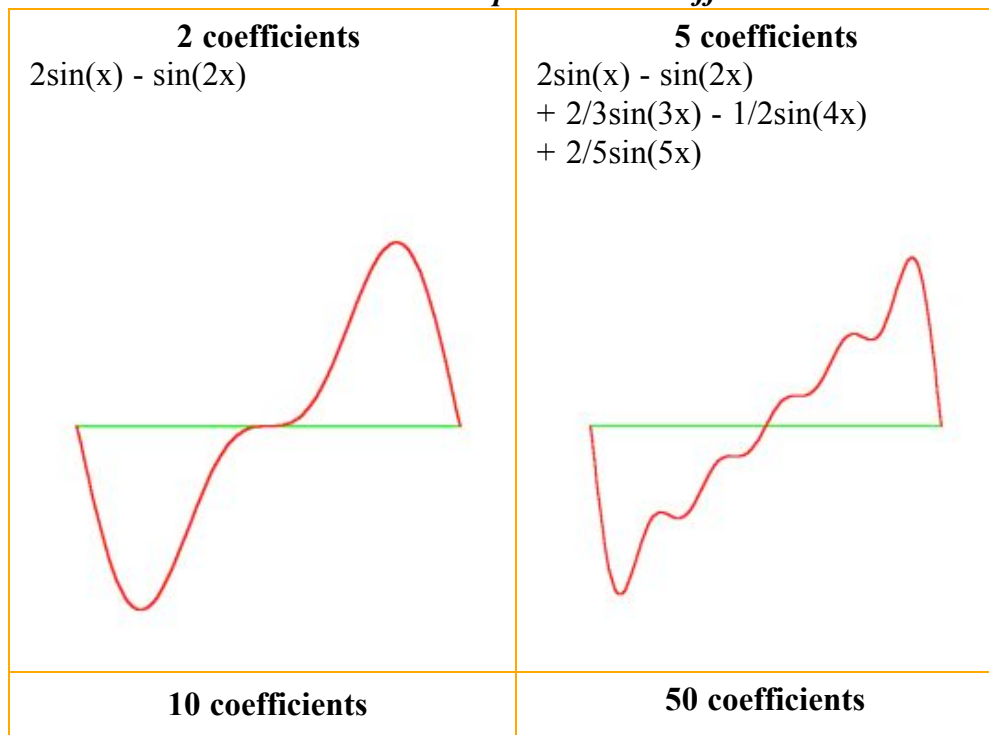
$$= -\frac{\cos n\pi}{n} - \frac{\cos(-n\pi)}{n} = -\frac{2\cos n\pi}{n} = -\frac{2}{n} (-1)^n$$

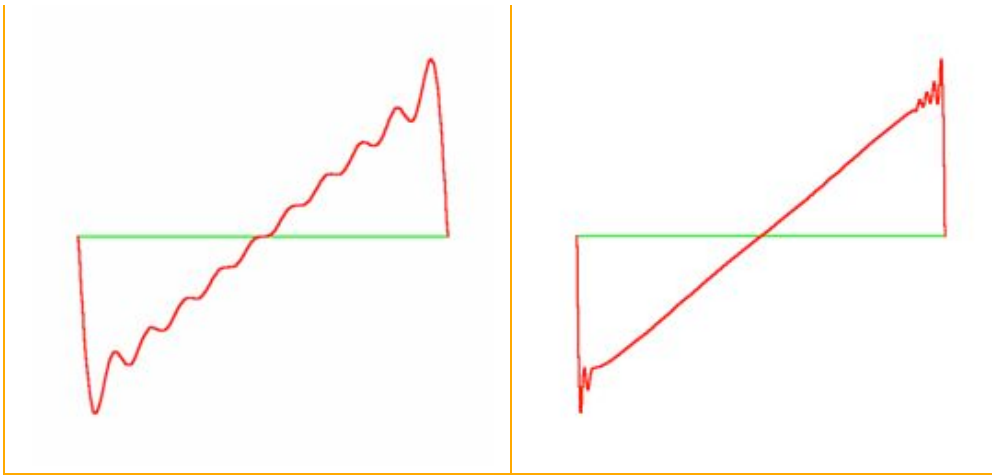
- Soit

Le calcul est donné à titre indicatif; il dépasse de loin le cadre de ce site

$x = 2 \sin x - \sin 2x + \frac{2}{3} \sin 3x - \frac{1}{2} \sin 4x + \dots$

Illustration selon la quantité de coefficients





-Y-

Voir

- [Fourier](#)
- [Série de Wallis](#)
- [Théorie des nombres](#)