

1. Examiner l'intégrabilité des fonctions données explicitement ci-dessous, en fonction éventuellement du paramètre réel α

- $\frac{\sin x}{1+x^2}$ sur \mathbb{R}
- $\frac{\sin x}{x}$ sur $[-1, 1]$
- $\frac{x^\alpha}{1+x^2}$ sur $]0, +\infty[$
- $\frac{\ln x}{1+x^\alpha}$ sur $]0, +\infty[$

2. Déterminer la valeur des intégrales ci-dessous

- $\int_0^{\pi/4} \sin x \cos x \, dx$
- $\int_0^{\pi/2} \sin x \cos(2x) \, dx$
- $\int_0^{+\infty} x e^{-x} \, dx$
- $\int_0^{+\infty} x e^{-x^2} \, dx$
- $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2-1} \, dx$

3. Déterminer la somme de la série suivante $\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{m/2}}$

4. Représenter graphiquement les ensembles suivants dans un repère orthonormé

$$\{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}, y \geq 1 - x^2 \text{ et } x^2 + 2y + y^2 \leq 3\}, \quad \{(\sqrt{1+t^2}, t) : t \in \mathbb{R}\}$$

5. Divers petits problèmes pratiques ...

- Un soir de pluie, on mesure une hauteur de 1mm d'eau par mètre carré. A combien de litres par mètre carré cela correspond-il?
- Combien de m³ d'eau de mer doit-on prendre pour en retirer 615 kg de sel si 1 l de cette eau pèse 1,025 kg et contient 3 % de son poids en sel?
- Si on double la longueur de l'arête d'un cube, l'aire totale des faces de ce cube est
 multipliée par 2 multipliée par 4 multipliée par 6 multipliée par 8 aucune des réponses précédentes ne convient
- Si on double la longueur de l'arête d'un cube, alors le rapport de l'aire totale des faces du cube vis-à-vis de son volume
 augmente diminue reste le même
- Quand on dit qu'une population de cellules a augmenté de 25%, le nombre de cellules est
 multiplié par 0.25 multiplié par 0.75 multiplié par 1.25 divisé par 0.25 divisé par 0.75 divisé par 1.25 aucune des réponses précédentes ne convient
- Quand on dit qu'une population de cellules a diminué de 25%, le nombre de cellules est
 multiplié par 0.25 multiplié par 0.75 multiplié par 1.25 divisé par 0.25 divisé par 0.75 divisé par 1.25 aucune des réponses précédentes ne convient
- Sur une carte à l'échelle $\frac{1}{25\,000}$ à quelle longueur en cm sera ramenée une distance réelle de 4,5 km?

1. Déterminer (si elles existent) les limites ci-dessous

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \arctg x \quad b) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} \quad c) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x} \quad d) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x \quad e) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sin x.$$

Solutions. $\frac{\pi}{2}, -1, 0, \infty$, n'existe pas

2. Examiner l'intégrabilité des fonctions données explicitement ci-dessous, en fonction éventuellement du paramètre réel α

- $\arctg x$ sur \mathbb{R}
- $\frac{x^\alpha}{1+x}$ sur $[0, +\infty[$

Solutions. Pas intégrable; $\alpha \in]-1, 0[$

3. Déterminer (si possible) la valeur des intégrales ci-dessous

- $\int_e^{e^2} \frac{\ln x}{x} dx$
- $\int_{-\infty}^0 \frac{1}{x^2+9} dx$
- $\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2} dx$

Solutions. $\frac{3}{2}, \frac{\pi}{6}$, n'existe pas

4. Déterminer la somme de la série suivante $\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m(m+1)}$

5. Représenter graphiquement les ensembles suivants dans un repère orthonormé

$$\{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}, |x - y - 1| \leq 1\}, \quad \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}, x^2 - y^2 = 0\}$$

6. Divers petits problèmes pratiques ...

- Un mètre cube de bois de chêne pèse 750 kg. Quel volume, en dm^3 , occupe 2,4 tonnes de bois?
- Quelle est l'échelle d'une carte sur laquelle 3 cm représentent 1,5 km?
- Soit le réel x appartenant à l'intervalle $] -\frac{\pi}{2}, 0[$ tel que $\operatorname{tg} x = -\frac{3}{4}$. Calculer la valeur de $\sin x$, $\cos x$, $\cotg x$.
- Le *nombre d'or* est le réel défini comme suit. Il s'agit du rapport entre deux longueurs (la plus grande au numérateur) telles que le rapport de la somme de celles-ci sur la plus grande soit égal à celui de la plus grande sur la plus petite. Que vaut ce nombre d'or?
- Si la suite x_m ($m \in \mathbb{N}_0$) de nombres strictement positifs converge vers une limite finie et vérifie

$$x_{m+1} = 1 + \frac{1}{x_m} \quad \forall m,$$

que vaut cette limite?