

1. Déterminer (si elles existent) les limites ci-dessous

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{arctg} x \quad b) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} \quad c) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x} \quad d) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x \quad e) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sin x.$$

2. Examiner l'intégrabilité des fonctions données explicitement ci-dessous, en fonction éventuellement du paramètre réel α

- $\operatorname{arctg} x$ sur $\mathbb{R}$
- $\frac{x^\alpha}{1+x}$ sur $[0, +\infty[$

3. Déterminer la valeur des intégrales ci-dessous (si possible)

$$a) \int_0^{\pi/4} \sin^2 x \cos(2x) dx, \quad b) \int_2^{+\infty} \frac{x}{(x-1)^3} dx, \quad c) \int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2-1} dx, \quad d) \int_e^{e^2} \frac{\ln x}{x} dx$$

4. Déterminer la somme des séries suivantes

$$a) \sum_{m=1}^{+\infty} (\ln(e^2))^{-m/2}, \quad b) \sum_{m=2}^{+\infty} \frac{1}{m(m+1)}$$

5. Représenter graphiquement les ensembles suivants dans un repère orthonormé

$$a) \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}, y \geq 1 - x^2 \text{ et } x^2 + 2y + y^2 \leq 3\}, \quad b) \{(\sqrt{1+t^2}, t) : t \in \mathbb{R}\}$$
$$c) \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}, |x - y - 1| \leq 1\}, \quad d) \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}, x^2 - y^2 = 0\}$$

6. On donne la succession d'intégrales simples suivantes

$$\int_0^1 \left(\int_1^{e^x} \ln y \, dy \right) dx.$$

- a) Calculer (si possible) cette succession d'intégrales.
- b) Représenter l'ensemble A (partie du plan) sur lequel on intègre.
- c) Permuter l'ordre d'intégration.
- d) La fonction $(x, y) \mapsto \ln y$ est-elle intégrable sur A ? Pourquoi?
Si elle est intégrable, que vaut alors son intégrale? Et que représente cette intégrale?

7. Divers petits problèmes ...

- a) Quelle est l'échelle d'une carte sur laquelle 3 cm représentent 1,5 km?
- b) Un soir de pluie, on mesure une hauteur d'eau de 1mm par mètre carré. A combien de litres par mètre carré cela correspond-il?
- c) Un pharmacien doit préparer une solution de 14 ml qui contient 7% d'arsenic. Il a deux types de solution à sa disposition, l'une contenant 12% d'arsenic et l'autre seulement 5%. Combien de ml de chaque type de solution doit-il prendre pour obtenir ce qu'il désire ?
- d) Soit le réel x appartenant à l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, 0[$ tel que $\operatorname{tg} x = -\frac{3}{4}$. Calculer la valeur de $\sin x$, $\cos x$, $\cotg x$.
- e) Le *nombre d'or* est le réel défini comme suit. Il s'agit du rapport entre deux longueurs (la plus grande au numérateur) telles que le rapport de la somme de celles-ci sur la plus grande soit égal à celui de la plus grande sur la plus petite. Que vaut ce nombre d'or?
- f) Si la suite x_m ($m \in \mathbb{N}_0$) de nombres strictement positifs converge vers une limite finie et vérifie

$$x_{m+1} = 1 + \frac{1}{x_m} \quad \forall m,$$

que vaut cette limite?