2ème année de bachelier en sciences physiques

Analyse II

Test de rentrée , septembre 2009

---

1. Déterminer (si elles existent) les limites ci-dessous

$$a)\ \lim_{x\to+\infty} \operatorname{arctg} x \quad b)\ \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} \quad c)\ \lim_{x\to+\infty} \frac{\sin x}{x} \quad d)\ \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x \quad e)\ \lim_{x\to+\infty} \sin x.$$

2. Examiner l'intégrabilité des fonctions données explicitement ci-dessous, en fonction éventuellement du paramètre réel positif ou nul α

   a) $\dfrac{\sin x}{1+x^2}$ sur $\mathbb{R}$
   b) $\dfrac{\sin x}{x}$ sur $[-1,1]$
   c) $\dfrac{1}{1+x^\alpha}$ sur $]0,+\infty[$
   d) Et si α est négatif, que peut-on dire?

3. Déterminer la valeur des intégrales ci-dessous (si possible)

$$a)\ \int_0^{\pi/4} \sin^2 x\ \cos(2x)\, dx, \quad b)\ \int_2^{+\infty} \frac{x}{(x-1)^3} dx, \quad c)\ \int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2-1}\, dx, \quad d)\ \int_e^{e^2} \frac{\ln x}{x} dx$$

4. Déterminer la somme des séries suivantes

$$a)\ \sum_{m=1}^{+\infty} \left(\ln(e^2)\right)^{-m/2}, \quad b)\ \sum_{m=2}^{+\infty} \frac{1}{m(m+1)}$$

5. Représenter graphiquement les ensembles suivants dans un repère orthonormé

$$a)\ \{(x,y)\ :\ x,y\in\mathbb{R}, y\geq 1-x^2 \text{ et } x^2+2y+y^2\leq 3\}, \qquad b)\ \{(\sqrt{1+t^2},t) : t\in\mathbb{R}\}$$
$$c)\ \{(x,y)\ :\ x,y\in\mathbb{R}, |x-y-1|\leq 1\}, \quad d)\ \{(x,y)\ :\ x,y\in\mathbb{R}, x^2-y^2=0\}$$

6. On donne la succession d'intégrales simples suivantes

$$\int_0^1 \left(\int_1^{e^x} \ln y\ dy\right) dx.$$

   a) Calculer (si possible) cette succession d'intégrales.
   b) Représenter l'ensemble A (partie du plan) sur lequel on intègre.
   c) Permuter l'ordre d'intégration.
   d) La fonction $(x,y)\mapsto \ln y$ est-elle intégrable sur A? Pourquoi?
   Si elle est intégrable, que vaut alors son intégrale? Et que représente cette intégrale?

7. Divers petits problèmes ...

   a) Quelle est l'échelle d'une carte sur laquelle 3 cm représentent 1,5 km?
   b) Soit le réel x appartenant à l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2},0\right[$ tel que $\operatorname{tg} x = -\frac{3}{4}$. Calculer la valeur de $\sin x,\ \cos x,\ \operatorname{cotg} x$.
   c) Le *nombre d'or* est le réel défini comme suit. Il s'agit du rapport entre deux longueurs (la plus grande au numérateur) telles que le rapport de la somme de celles-ci sur la plus grande soit égal à celui de la plus grande sur la plus petite. Que vaut ce nombre d'or?
   d) Si la suite x_m ($m\in\mathbb{N}_0$) de nombres strictement positifs converge vers une limite finie et vérifie

$$x_{m+1} = 1+\frac{1}{x_m} \quad \forall m,$$

   que vaut cette limite?