Année académique 2010-2011 – 2BM

Analyse II, partie 1 – « Test de rentrée »

Exercice 1. (a) Un laborantin doit préparer une solution de $18ml$ qui contient 3% de glucose. Il a deux types de solution à sa disposition, l'une contenant 10% de glucose et l'autre seulement 1%. Combien de ml de chaque type de solution doit-il prendre pour obtenir ce qu'il désire ? Justifier.

(b) Une marchandise vendue à un prix p est soldée durant le mois de janvier à -10%, coûtant ainsi p'. Après la période des soldes, la marchandise n'a pas été vendue et le vendeur augmente le prix p' de 10% ; la marchandise vaut alors p''. Un acheteur potentiel, qui ne peut se déplacer durant la période des soldes a-t-il intérêt à acheter la marchandise avant ou après cette période ? Justifier.

Exercice 2. Résoudre dans $[0, 2\pi]$ l'équation

$$\sin(2x) = \cos(x).$$

Exercice 3. Déterminer la somme des séries

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \left[\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right]^{m/2}, \qquad \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(\ln 3)^m}{m!} \qquad \text{et} \qquad \sum_{m=2}^{+\infty} \frac{1}{m(m+1)}.$$

Exercice 4. Calculer (si possible) la limite

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x+\sin(x)}{x}.$$

Exercice 5. Calculer (si possible) les intégrales suivantes :

(a) $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{dx}{\cos^2(x)}$ (b) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \sin(x)\cos(3x)\,dx$ (c) $\displaystyle\int_0^{+\infty} x\,e^{-3x}\,dx$ (d) $\displaystyle\int_0^{+\infty} x\,e^{-3x^2}\,dx$

(e) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{x^2}{x^2-1}\,dx$ (f) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2}$ (g) $\displaystyle\int_1^{e} \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2(x)}}$

Exercice 6. Représenter graphiquement dans un repère orthonormé l'ensemble

$$E = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1,\ 0 < y < x^2\right\}$$

et calculer (si possible) l'intégrale

$$\iint_E \frac{x^2 y}{(4x^2+y^2)^2}\,dxdy.$$

Exercice 7. (a) Pour quelles valeurs du paramètre réel t la fonction

$$x \mapsto \frac{x^t - 1}{\ln(x)}$$

est-elle intégrable sur $]0,1[$? Et sur $]0,+\infty[$?

(b) En indiquant l'ensemble dans lequel varie t, calculer l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{x^t-1}{\ln(x)}\,dx.$$

L. Simons & F. Bastin – 28 septembre 2010.