

« Test de rentrée »

Exercice 1. Un pharmacien a $0,02 \text{ dm}^3$ d'une solution qui contient une concentration de glucose à 25%. Combien de ml de glucose doit-il ajouter pour obtenir une concentration à 60%? Justifier.

Exercice 2. Résoudre dans $[0, 2\pi]$ l'équation

$$2 \cos^2(x) = 5 \sin(x) - 1.$$

Exercice 3. Déterminer la somme des séries

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \left[\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) \right]^m, \quad \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(\ln 3)^m}{m!} \quad \text{et} \quad \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{m!}{m^2}.$$

Exercice 4. Calculer (si possible) les limites

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin(x) + x}{x}.$$

Exercice 5. Calculer (si possible) les intégrales suivantes :

$$\begin{aligned} \text{(a)} \int_0^\pi \frac{dx}{\cos^2(x)} & \quad \text{(b)} \int_0^{\pi/4} \sin(x) \cos(3x) dx & \quad \text{(c)} \int_0^1 \ln(x^2) dx \\ \text{(d)} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2} & \quad \text{(e)} \int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2(x)}} \end{aligned}$$

Exercice 6. (a) Représenter graphiquement dans un repère orthonormé l'ensemble

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1, 0 < y < x^2\}$$

et calculer (si possible) l'intégrale

$$\iint_A \frac{x^2 y}{(4x^2 + y^2)^2} dx dy.$$

(b) Calculer (si possible) l'intégrale

$$\iint_B \frac{dx dy}{xy}$$

où B est la région bornée du premier quadrant comprise entre la droite d'équation $y = x$ et la parabole d'équation $y = x^2$.

Exercice 7. Calculer l'aire de la partie du plan dont une description analytique est

$$E = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-1, 1] \text{ et } 2 \sin^2\left(\frac{\pi x}{4}\right) \leq y \leq 2 \cos^2\left(\frac{\pi x}{4}\right) \right\}.$$

Donner une représentation graphique de cet ensemble.

Exercice 8. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, calculer (si possible) l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2} \operatorname{ch}(xt) dt.$$