Analyse II

2BMP, TD novembre-décembre 2007 - Suggestions pour solutions

Version 13 décembre 2007, LT (Cours B) et FB

***Exercice* 1. Soit un signal f (on suppose que cette fonction est intégrable et de carré intégrable). On définit *l'autocorrélation* du signal par**

$$E_f(t) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{f(x-t)}dx,\ t \in \mathbb{R}$$

et la *densité spectrale de puissance* de ce signal (PSD) par

$$D_f(y) = \left|\hat{f}(y)\right|^2,\ y \in \mathbb{R}$$

où $\hat{f}(y)$ désigne la transformée de Fourier négative de f en y. On pose $f^s(x) = \overline{f(-x)}$, $x \in \mathbb{R}$.

1. **Montrer que l'autocorrélation s'écrit**

$$E_f = f * f^s$$

2. **Montrer que l'autocorrélation d'une fonction à valeurs réelles est une fonction paire.**
3. **Montrer que**

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} |E_f(t)| = E_f(0)$$

4. **Montrer que la densité spectrale et l'autocorrélation sont liées par la transformation de Fourier.**

Solution. 1) Soit $t \in \mathbb{R}$. On a directement

$$(f * f^s)(t) = \int_{\mathbb{R}} f(x)f^s(t-x)dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{f(x-t)}dx = E_f(t).$$

d'où la conclusion.

2) Soit f une fonction à valeurs réelles. On a

$$\begin{aligned}
E_f(-t) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{f(x+t)}dx &= \int_{\mathbb{R}} f(x)f(x+t)dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} f(y-t)f(y)dy \quad \text{via le changement de variables } x = y-t \\
&= \int_{\mathbb{R}} f(y)\overline{f(y-t)}dt = E_f(t)
\end{aligned}$$

3) Soit $t \in \mathbb{R}$. Considérons la fonction f de l'énoncé et la fonction g définie par $g(x) = f(x-t),\ x \in \mathbb{R}$. Il s'agit de deux fonctions de $L^2(\mathbb{R})$ et on peut donc leur appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans L^2. On a

$$|\langle f, g\rangle_{L^2}| \leq ||f||_{L^2}||g||_{L^2}$$

c'est-à-dire

$$\left|\int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{g(x-t)}dx\right| \leq ||f||_{L^2}||f(\cdot-t)||_{L^2}$$

Comme $||f(\cdot - t)||_{L^2} = ||f||_{L^2}$, on obtient

$$|E_f(t)| \leq ||f||^2_{L^2}$$

De là, on tire

$$E_f(t)| \leq \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{f(x)}dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{f(x-0)}dx = E_f(0)$$

donc

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} |E_f(t)| = E_f(0)$$

4) On sait que $E_f = f * f^s$. En appliquant la transformée de Fourier négative aux deux membres de cette égalité, on obtient que $\mathcal{F}_y^- E_f = \mathcal{F}_y^- f \, \mathcal{F}_y^- f^s$. Or on a

$$\mathcal{F}_y^- f^s = \int_{\mathbb{R}} e^{-ixy}\overline{f(-x)}dx = \int_{\mathbb{R}} e^{ixy}\overline{f(x)}dx = \overline{\int_{\mathbb{R}} e^{-ixy}f(x)dx} = \overline{\mathcal{F}_y^- f}$$

On en tire donc que

$$\mathcal{F}_y^- E_f = \mathcal{F}_y^- f \, \overline{\mathcal{F}_y^- f} = |\mathcal{F}_y^- f|^2 = D_f(y)$$

Question.
Ce qui précède reste-t-il valable si f est seulement de carré intégrable ? Pourquoi ?

Exercice 2. **Si possible, déterminer le produit de composition des fonctions f et g suivantes**

$$f(x) = |x|,\ x \in \mathbb{R} \quad g(x) = \frac{1}{(1+x^2)^2},\ x \in \mathbb{R}$$

Solution. Soit $y \in \mathbb{R}$. On a

$$(f*g)(y) = \int_{\mathbb{R}} f(y-x)g(x)dx = \int_{\mathbb{R}} |y-x|\frac{1}{(1+x^2)^2}dx$$

et cette dernière intégrale a un sens puisque $x \mapsto |y-x|\frac{1}{(1+x^2)^2}$ est continu et

$$\lim_{x\to\pm\infty} x^2|y-x|\frac{1}{(1+x^2)^2} = 0$$

On a alors

$$\begin{aligned}(f*g)(y) &= \int_{-\infty}^{y} \frac{y-x}{(1+x^2)^2}dx + \int_{y}^{+\infty}\frac{x-y}{(1+x^2)^2}dx \\ &= y\int_{-\infty}^{y}\frac{1}{(1+x^2)^2}dx - \int_{-\infty}^{y}\frac{x}{(1+x^2)^2}dx + \int_{y}^{+\infty}\frac{x}{(1+x^2)^2}dx - y\int_{y}^{+\infty}\frac{1}{(1+x^2)^2}dx\end{aligned}$$

Calculons alors une primitive de chacune des fonctions

$$x \mapsto \frac{x}{(1+x^2)^2}, \qquad x \mapsto \frac{1}{(1+x^2)^2}.$$

D'une part, on a directement

$$\int \frac{x}{(1+x^2)^2}dx \simeq \frac{-1}{2(1+x^2)}.$$

D'autre part, comme

$$\frac{1}{(1+x^2)^2} = \frac{1+x^2-x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{1+x^2} - x\frac{x}{(1+x^2)^2},$$

on obtient

$$\int\frac{dx}{(1+x^2)^2} = \int\frac{dx}{1+x^2} - \int x\frac{x}{(1+x^2)^2}dx = \arctan(x) + \frac{1}{2}\int xD\left(\frac{1}{1+x^2}\right)dx \simeq \frac{1}{2}\left(\arctan(x) + \frac{x}{1+x^2}\right)$$

En utilisant ces primitives pour le calcul des intégrales donnant l'expression de $(f*g)(y)$, on obtient

$$(f*g)(y) = 1 + y\arctan(y)$$

Exercice 3. **On considère $f(x) = \frac{\cos(x)}{x}$, $x \in [1,+\infty[$. Montrer que cette fonction n'est pas intégrable sur l'intervalle $[1,+\infty[$ mais qu'elle admet une intégrale fléchée en $+\infty$. Suggestion : On sait que la fonction (non-intégrable à l'infini) $x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$ admet une intégrale fléchée à l'infini.**

Solution. Montrons que f n'est pas intégrable sur $[1,+\infty[$. Si f était intégrable, par le changement de variables $x = y - \frac{\pi}{2}$, la fonction $g(y) = \frac{\sin(y)}{y-\frac{\pi}{2}}$ serait intégrable sur l'intervalle $[1+\frac{\pi}{2},+\infty[$. Or on a

$$\frac{|\sin(y)|}{y-\frac{\pi}{2}} \geq \frac{|\sin(y)|}{y},\ y > \frac{\pi}{2}$$

Comme $y \mapsto \frac{\sin(y)}{y}$ n'est pas intégrable en $+\infty$, cela entraîne que $y \mapsto \frac{\sin(y)}{y-\frac{\pi}{2}}$ ne l'est pas non plus, d'où une contradiction.

Montrons que la fonction $x \mapsto \frac{\cos(x)}{x}$ admet une intégrale fléchée en $+\infty$. (Remarque : c'est immédiat si on utilise des résultats théoriques donnant des conditions suffisantes d'existence d'intégrales fléchées, cf notes de cours). On doit prouver que la limite

$$\lim_{m\to+\infty}\int_{\pi}^{r_m}\frac{\cos(x)}{x}dx$$

existe et est finie pour toute suite de réels $(r_m)_{m\in\mathbb{N}}$ telle que $r_m \to +\infty$. Soit $(r_m)_{n\in\mathbb{N}}$ une telle suite et fixons $m \in \mathbb{N}$. On a successivement

$$\begin{aligned}
\int_{\pi}^{r_m}\frac{\cos(x)}{x}dx &= -\int_{\pi-\pi/2}^{r_m-\pi/2}\frac{\sin(y)}{y+\pi/2}dy\\
&= -\int_{\pi/2}^{r'_m}\frac{\sin(y)}{y}dy + \int_{\pi/2}^{r'_m}\left(-\frac{\sin(y)}{y+\pi/2}+\frac{\sin(y)}{y}\right)dy\\
&= -\int_{\pi/2}^{r'_m}\frac{\sin(y)}{y}dy + \frac{\pi}{2}\int_{\pi/2}^{r'_m}\frac{\sin(y)}{y(y+\pi/2)}dy
\end{aligned}$$

On sait que la fonction $y \mapsto \frac{\sin(y)}{y}$ admet une intégrale fléchée en $+\infty$. De plus, puisque la fonction $y \mapsto \frac{\sin(y)}{y(y+\pi/2)}$ est intégrable sur $[\pi/2,+\infty[$, elle admet également une intégrale fléchée en $+\infty$. Au total la fonction de l'énoncé admet également une intégrale fléchée en $+\infty$.

Exercice 4. **Soit la fonction**

$$g(x) = \frac{1-\cos(x)}{x},\ x \neq 0, \quad g(0) = 0.$$

Montrer que cette fonction est continue sur $\mathbb{R}$, appartient à $L^2(\mathbb{R})$ mais pas à $L^1(\mathbb{R})$. En déterminer ensuite la transformée de Fourier (négative).

Solution. Remarque : plusieurs méthodes existent (cf notamment justifications au cours).

Montrons que la fonction n'appartient pas à L^1. Si elle était intégrable, comme $x \mapsto \frac{\cos(x)}{x}$ admet une intégrale fléchée en $+\infty$(cf par exemple un des exercices précédents) alors leur somme, à savoir la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ admettrait également une intégrale fléchée en $+\infty$. Comme on sait que ce n'est pas le cas, on en conclut que $x \mapsto \frac{1-\cos(x)}{x}$ n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}$. (On peut aussi procéder en utilisant l'expression $g(x) = \frac{2\sin^2(x/2)}{x}$ et le changement de variables $t = \frac{\pi}{2} - x$ par exemple.)

Montrons que la fonction appartient à L^2. Elle est continue sur $\mathbb{R}$. En effet son expression montre directement qu'elle est continue sur $\mathbb{R}_0$ et on a

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x} = 0$$

De plus on a $\lim_{x\to+\infty} x^{3/2}|f(x)|^2 = 0$. La fonction f appartient donc à $L^2 \setminus L^1$.

Considérons les fonctions

$$f_M(x) = \frac{1-\cos x}{x}\chi_{[-M,M]}(x),\ M \in \mathbb{N}_0.$$

Ces fonctions appartiennent à $L^1 \cap L^2$ et elles convergent dans L^2 vers f.

Etudions leur transformée de Fourier. Puisque f_M est une fonction impaire, on a, pour M fixé,

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_y^{\pm} f_M &= \int_{\mathbb{R}} e^{\pm ixy} \frac{1-\cos x}{x} \chi_{[-M,M]}(x)\, dx \\
&= \int_{-M}^{M} e^{\pm ixy} \frac{1-\cos x}{x}\, dx \\
&= \pm 2i \int_0^M \sin(xy) \frac{1-\cos x}{x}\, dx \\
&= \pm 2i \left(\int_0^M \frac{\sin(xy)}{x}\, dx - \int_0^M \frac{\sin(xy)\cos x}{x}\, dx \right) \\
&= \pm 2i \left(\int_0^M \frac{\sin(xy)}{x}\, dx - \int_0^M \frac{\sin\big(x(y+1)\big) + \sin\big(x(y-1)\big)}{2x}\, dx \right) \\
&= \pm i \left(\int_0^M \frac{2\sin(xy)}{x}\, dx - \int_0^M \frac{\sin\big(x(y+1)\big)}{x}\, dx - \int_0^M \frac{\sin\big(x(y-1)\big)}{x}\, dx \right).
\end{aligned}$$

Puisque l'on sait que pour $\lambda \in \mathbb{R}_0$ on a

$$\lim_{M\to+\infty} \int_0^M \frac{\sin(\lambda x)}{x} dx = \operatorname{sign}(\lambda)\frac{\pi}{2}$$

on obtient

$$F_y^{\pm} f = \lim_{M\to+\infty} \mathcal{F}_y^{\pm} f_M = \begin{cases} 0 & \text{si } y \in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[\cup\{0\} \\ \mp i\pi & \text{si } y \in]-1,0[\\ \pm i\pi & \text{si } y \in]0,1[\\ \pm i\frac{\pi}{2} & \text{si } y = 1 \\ \mp i\frac{\pi}{2} & \text{si } y = -1 \end{cases}$$

ou encore

$$F_y^{+} f = -i\pi\chi_{]-1,0[}(y) + i\pi\chi_{]0,1[}(y), \quad F_y^{-} f = i\pi\chi_{]-1,0[}(y) - i\pi\chi_{]0,1[}(y)$$

***Exercice* 5. On donne les fonctions suivantes**

$$f_1(x) = \begin{cases} e^{-x} & \textbf{si } x \geq 0 \\ 0 & \textbf{si } x < 0 \end{cases}, \quad f_2(x) = \begin{cases} e^{-x} & \textbf{si } x \geq 0 \\ -e^{x} & \textbf{si } x < 0 \end{cases},$$

$$f_3(x) = e^{-|x|}\ (x \in \mathbb{R}),\ f_4(x) = \frac{1}{1+ix} = \frac{1-ix}{1+ix}\ (x \in \mathbb{R})$$

- **Déterminer la transformée de Fourier (-) de f_1, f_2, f_3, en précisant s'il s'agit de la transformée dans L^1 ou L^2.**
- **Déterminer la transformée de Fourier (+) de f_4 en spécifiant s'il s'agit de la transformée dans L^1 ou L^2. Montrer que cette transformée est nulle sur $]-\infty,0[$.**
- **Déterminer (si possible) le produit de composition $f_1 * f_1$ ainsi que sa transformée de Fourier.**

Solution. 1) [Transformée de Fourier de f_1 :] Puisque $f_1 \in C_0([0,+\infty[)$ et que $\lim_{x\to+\infty} x^2 e^{-x} = 0$, la fonction appartient à $L^1(\mathbb{R})$ et on a

$$\mathcal{F}_y^{\pm} f_1 = \int_0^{+\infty} e^{-x} e^{\pm ixy} dx = \int_0^{+\infty} e^{-(1\mp iy)x} dx = \left[\frac{e^{-(1\mp iy)x}}{-(1\mp iy)}\right]_{x\to 0}^{x\to+\infty} = \frac{1}{1\mp iy}$$

On a calculé la transformée de Fourier (+) car elle nous servira plus loin dans l'exercice.

2) [Transformée de Fourier de f_2 :] La fonction f_2 est continue sur $[0,+\infty[$ et on a $\lim_{x\to+\infty} x^2 f_2(x) = 0$. Elle est également continue sur $]-\infty,0[$ et on a $\lim_{x\to 0} f_2(x) = -1$ ainsi que $\lim_{x\to-\infty} x^2 f_2(x) = 0$.

Au total, la fonction f_2 est intégrable sur $\mathbb{R}$ et on a

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_y^- f_2 &= \int_{-\infty}^{0} (-e^x)e^{-ixy}dx + \int_0^{+\infty} e^{-x}e^{-ixy}dx \\
&= -\int_0^{+\infty} e^{-x}e^{ixy}dx + \int_0^{+\infty} e^{-x}e^{-ixy}dx \\
&= -\mathcal{F}_y^+ f_1 + \mathcal{F}_y^- f_1 \\
&= \frac{-1}{1-iy} + \frac{1}{1+iy} = \frac{-2iy}{1+y^2}
\end{aligned}$$

3) [Transformée de Fourier de f_3 :] La fonction f_3 est continue sur $\mathbb{R}$ et on a

$$\lim_{x\to\pm\infty} x^2 f_3(x) = \lim_{x\to\pm\infty} x^2 e^{-|x|} = 0$$

La fonction f_3 est donc intégrable sur $\mathbb{R}$ et on a

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_y^- f_3 &= \int_{\mathbb{R}} e^{-ixy}e^{-|x|}dx = 2\int_0^{+\infty} e^{-x}\cos(xy)dx \\
&= 2\Re \int_0^{+\infty} e^{-x}e^{-ixy}dx = 2\Re\int_0^{+\infty} e^{-(1+iy)x}dx \\
&= 2\Re\left[\frac{-e^{-(1+iy)x}}{1+iy}\right]_{x\to 0}^{x\to+\infty} \\
&= 2\Re\left(\frac{1}{1+iy}\right) = 2\Re\left(\frac{1-iy}{1+y^2}\right) \\
&= \frac{2}{1+y^2}
\end{aligned}$$

4) [Transformée de Fourier de f_4 :] La fonction $x \mapsto \frac{1}{1+ix}$ n'est pas intégrable car $\lim_{x\to\infty} x\frac{1}{1+ix}$ existe et est non nulle. Elle est de carré intégrable car elle est continue sur $\mathbb{R}$ et $\lim_{x\to\pm\infty} x^2\frac{1}{(1+ix)^2} = -1$. Puisque $\mathcal{F}_x^- f_1 = F_x^- f_1 = \frac{1}{1+ix} = f_4(x)$, le théorème de Fourier implique que

$$F_y^+ f_4 = F_y^+ F^- f_1 = 2\pi f_1(y) = 2\pi e^{-y}\chi_{[0,+\infty[}(y)\ pp$$

Il est évident que cette fonction est nulle sur $]-\infty, 0[$.

5) [Produit de composition $f_1 * f_1$:] Montrons que le produit de composition a un sens. Soit $x \in \mathbb{R}$. Il faut montrer que la fonction $y \mapsto f_1(y)f_1(x-y)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$. Si $x \leq 0$, cette fonction est nulle et si $x > 0$,elle s'écrit explicitement

$$f_1(y)f_1(x-y) = e^{-x}\chi_{[0,x]}(y).$$

Cette fonction de y est donc intégrable sur $\mathbb{R}$. On obtient aussi

$$(f_1 * f_1)(x) = e^{-x}\int_0^x dy = xe^{-x}, x > 0 \quad (f_1 * f_1)(x) = 0, x \leq 0.$$

6) [Transformée de Fourier de $f_1 * f_1$:] La fonction $x \mapsto xe^{-x}\chi_{[0,+\infty[}(x)$ est continue sur $[0, +\infty[$, nulle en dehors et on a $\lim_{x\to+\infty} x^2 f_1(x) = 0$. Cette fonction est donc intégrable sur $\mathbb{R}$ et on a

$$\mathcal{F}_y^-(f_1 * f_1) = \mathcal{F}_y^- f_1 \quad \mathcal{F}_y^- f_1 = \frac{1}{(1+iy)^2}$$

Remarque. Pour la justification de l'existence du produit de composition et le l'intégrabilité de celui-ci, on peut bien sûr se référer aux cas de base étudiés.

Exercice 6 (Résolution de l'équation de la chaleur via transformation de Fourier). **Soit une fonction $u = u(x,t)$ ($x \in \mathbb{R}, t \geq 0$) de classe C_2 dont les dérivées partielles jusqu'à l'ordre 2 sont intégrables par rapport à x sur $\mathbb{R}$ quel que soit t. Soit aussi une constante strictement positive v. On suppose que u vérifie l'équation**

$$D_t u(x,t) = v^2 D_x^2 u(x,t),\ t \geq 0, x \in \mathbb{R}$$

On pose

$$f(x) = u(x,0),\ \hat{f} = \mathcal{F}^- f$$

et on définit la fonction

$$F(y,t),\ t \geq 0,\ y \in \mathbb{R}$$

de telle sorte que, pour t fixé, $F(y,t)$ soit la transformée de Fourier (négative) en y de la fonction $x \mapsto u(x,t)$.

1. **Montrer que pour tout y, la fonction $t \mapsto F(y,t)$ vérifie**

$$D_t F(y,t) + v^2 y^2 F(y,t) = 0.$$

2. **Déduire du point précédent que l'on a**

$$F(y,t) = \hat{f}(y) e^{-v^2 y^2 t}.$$

3. **Déduire de ce qui précède que l'on a finalement**

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} f\left(x + 2v\sqrt{t}y\right) e^{-y^2} dy,\ x \in \mathbb{R},\ t \geq 0.$$

Solution. 1) Soit $y \in \mathbb{R}$. Par définition on a

$$F(y,t) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ixy} u(x,t)\ dx.$$

Une dérivation par rapport à t sous le signe d'intégration (intégrales paramétriques) puis l'utilisation de l'hypothèse donne

$$D_t F(y,t) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ixy} D_t u(x,t) dx = v^2 \int_{\mathbb{R}} e^{-ixy} D_x^2 u(x,t)\ dx.$$

Cela étant, deux intégrations par parties donnent alors

$$D_t F(y,t) = v^2(-iy)^2 \int_{\mathbb{R}} e^{-ixy} u(x,t)\ dx = -v^2 y^2 F(y,t)$$

2) Soit $y \in \mathbb{R}$. Vu le point 1), la fonction $t \mapsto F(y,t)$ est solution de l'équation différentielle linéaire à coefficients constants d'ordre 1

$$D_t g(t) + v^2 y^2 g(t) = 0$$

dont le polynôme caractéristique est $z \mapsto z + v^2 y^2$. L'unique racine de ce polynôme est $-v^2 y^2$. Par conséquent, il existe une constante C telle que

$$F(y,t) = Ce^{-v^2 y^2 t} \quad t \geq 0.$$

Comme

$$F(y,0) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ixy} u(x,0)\ dx = \int_{\mathbb{R}} e^{-ixy} f(x)\ dx = \hat{f}(y)$$

on en déduit que $C = F(y,0) = \hat{f}(y)$, donc

$$F(y,t) = \hat{f}(y) e^{-v^2 y^2 t},\ y \in \mathbb{R},\ t \geq 0.$$

3) Si $t > 0$, la gaussienne $y \mapsto e^{-v^2 t y^2}$ vérifie

$$e^{-v^2 t y^2} = \frac{1}{2v\sqrt{\pi t}} \mathcal{F}^-_{x \to y} g(x) = \frac{1}{2v\sqrt{\pi t}} \widehat{g}(y)$$

avec $g(x) = e^{-\frac{x^2}{4v^2 t^2}}$. On obtient ainsi

$$F(y,t) = \frac{1}{2v\sqrt{\pi t}} \widehat{f}(y)\widehat{g}(y) = \frac{1}{2v\sqrt{\pi t}} \mathcal{F}^-_y (f * g)$$

Or, par définition, on a

$$F(y,t) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ixy} u(x,t)\ dx = \mathcal{F}^-_{x \to y} u(x,t)$$

donc

$$u(x,t) = \frac{1}{2v\sqrt{\pi t}}(f * g)(x),\ x \in \mathbb{R}$$

vu les hypothèses de régularité de u et le théorème de Fourier. Pour conclure, il suffit donc d'examiner l'expression du produit de composition intervenant dans cette égalité. On a successivement

$$\begin{aligned}
(f * g)(x) &= \int_{\mathbb{R}} g(y)f(x-y)dy \\
&= 2v\sqrt{t} \int_{\mathbb{R}} g(-2v\sqrt{t}y')f(x+2v\sqrt{t}y')dy' \qquad (-y = 2v\sqrt{t}y') \\
&= 2v\sqrt{t} \int_{\mathbb{R}} e^{-y'^2} f(x+2v\sqrt{t}y')dy'
\end{aligned}$$

donc

$$u(x,t) = \frac{1}{2v\sqrt{\pi t}}(f * g)(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-y^2} f(x+2v\sqrt{t}y)dy$$

comme annoncé.

Pour $t = 0$ c'est immédiat puisque $u(x,0) = f(x)$ et

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x+0)e^{-y^2}dy = f(x)\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-y^2}dy = f(x).$$

Exercice 7. **Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$, telle que $x \mapsto x^2 f(x)$ soit borné sur $\mathbb{R}$. Démontrer que**

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} f(x+m) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}^{-}_{2\pi m} f e^{2i\pi m x}.$$

En déduire que

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x+m)^2} = \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi x)}, \qquad x \notin \mathbb{Z}$$

Solution. La fonction

$$F(x) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} f(x+m)$$

est continue sur $\mathbb{R}$ (car elle converge uniformément sur tout intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$) et 1-périodique. Nous pouvons donc la développer en série trigonométrique de Fourier dans $L^2([0,1])$. Ce développement est donné par

$$F = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \langle F, u_m \rangle\, u_m$$

avec $u_m(x) = e^{2i\pi m x}$ (la convergence a lieu dans $L^2([0,1])$ et aussi en tout réel x si la fonction f est assez régulière-voir les résultats de convergence ponctuelle des séries trigonométriques de Fourier). Calculons les coefficients de ce développement : pour tout m, on a

$$\begin{aligned}
< F, u_m >= \int_0^1 F(x)\overline{u_m(x)}dx &= \int_0^1 \sum_{j=-\infty}^{+\infty} f(x+k)e^{-2i\pi m x}dx \\
&= \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \int_0^1 f(x+k)e^{-2i\pi m x}dx \\
&= \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \int_k^{k+1} f(x)e^{-2i\pi m x}dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-2i\pi m x}dx \\
&= \mathcal{F}^{-}_{2\pi m} f;
\end{aligned}$$

on obtient bien la formule annoncée.

Montrons maintenant la seconde partie de l'énoncé. On applique le résultat obtenu au point précédent à la fonction f définie par

$$f(x) = \left(\frac{\sin(\pi x)}{x}\right)^2 \quad (x \neq 0), \quad f(0) = \pi^2$$

Rappelons alors que l'on a

$$\mathcal{F}_x^+ \chi_{[-\pi,\pi]} = \begin{cases} 2\pi & \text{si } x = 0 \\ \frac{2\sin(\pi x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$$

Il s'ensuit que l'on a

$$f(x) = \left(\frac{1}{2}\mathcal{F}_x^+ \chi_{[-\pi,\pi]}\right)^2 = \frac{1}{4}\mathcal{F}_x^+ \left(\chi_{[-\pi,\pi]} * \chi_{[-\pi,\pi]}\right)$$

et on obtient donc

$$\mathcal{F}_{2\pi m}^- f = \frac{\pi}{2}\left(\chi_{[-\pi,\pi]} * \chi_{[-\pi,\pi]}\right)(2\pi m)$$

pour tout m, grâce au théorème de Fourier et à la régularité des fonctions. On a

$$\begin{aligned} \left(\chi_{[-\pi,\pi]} * \chi_{[-\pi,\pi]}\right)(x) &= \int_{\mathbb{R}} \chi_{[-\pi,\pi]}(y)\chi_{[-\pi,\pi]}(x-y)dy = \int_{\mathbb{R}} \chi_{[-\pi,\pi]\cap[-\pi+x,\pi+x]}(y)dy \\ &= \begin{cases} 2\pi - x & \text{si } x \in [0, 2\pi[\\ 2\pi + x & \text{si } x \in]-2\pi, 0[\\ 0 & \text{si } |x| \geq 2\pi \end{cases} \end{aligned}$$

donc

$$\mathcal{F}_{2\pi m}^- f = 0 \ \text{ si } m \neq 0, \qquad \mathcal{F}_{2\pi m}^- f = \pi^2 \ \text{ si } m = 0.$$

Dès lors, pour tout réel non entier x, on a

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} f(x+m) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2(\pi(x+m))}{(x+m)^2} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2(\pi x)}{(x+m)^2} = \pi^2$$

(cette égalité reste en fait valable pour tout réel), donc

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x+m)^2} = \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi x)} \quad (x \notin \mathbb{Z}).$$

Cette dernière relation est l'égalité annoncée.