Analyse II (1^{re} Partie)

Correction de l'interrogation du 9 décembre 2008

2^{e} Bachelier en Sciences Mathématiques

Question 1. 1.1) La fonction $x \mapsto e^{-|x|}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et intégrable en $\pm\infty$ car

$$\lim_{x\to\pm\infty} x^2 e^{-|x|} = \lim_{x\to\pm\infty} x^2 e^{\mp x} = 0.$$

Par conséquent, la fonction f est intégrable sur $\mathbb{R}$ puisqu'il s'agit d'une fonction mesurable sur $\mathbb{R}$ dont le module est intégrable sur $\mathbb{R}$. Il vient donc successivement

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_2^+ f &= \int_{\mathbb{R}} e^{2ix} f(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}} e^{3ix} e^{-|x|}\, dx = 2\int_0^{+\infty} \cos(3x)\, e^{-x}\, dx \\ &= 2\Re \int_0^{+\infty} e^{-(1+3i)x}\, dx = 2\Re \frac{1}{1+3i} = \frac{1}{5}\end{aligned}$$

puisque $\lim_{x\to+\infty} e^{-(1+3i)x} = 0$.

1.2) La fonction f définie par $f(x) = e^{-a|x-1|}$ est continue sur $\mathbb{R}$. Elle est intégrable en $\pm\infty$ si et seulement si $a > 0$. En effet, lorsque $a > 0$, on a $-a|x-1| \to -\infty$ lorsque $x \to \pm\infty$ donc

$$\lim_{x\to\pm\infty} x^2 e^{-a|x-1|} = 0.$$

La fonction f est donc intégrable sur $\mathbb{R}$ lorsque $a > 0$. Lorsque $a \leq 0$, on constate que

$$\lim_{x\to\pm\infty} x e^{-a|x-1|} = +\infty$$

d'où on déduit que la fonction f n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}$.

Lorsque $a > 0$ et $y \in \mathbb{R}$, un calcul similaire à ce qui a été fait au point 1.1) donne

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_y^+ f &= \int_{\mathbb{R}} e^{ixy} e^{-a|x-1|}\, dx = \int_{\mathbb{R}} e^{i(t+1)y} e^{-a|t|}\, dt = 2e^{iy} \int_0^{+\infty} \cos(ty)\, e^{-at}\, dt \\ &= 2e^{iy}\, \Re \int_0^{+\infty} e^{(iy-a)t}\, dt = 2e^{iy}\, \Re \frac{1}{a-iy} = e^{iy} \frac{2a}{y^2+a^2}.\end{aligned}$$

Fixons $a > 0$. La fonction

$$x \mapsto \frac{\cos x \sin x}{x(a^2+x^2)}$$

est continue sur $]0, +\infty[$ et admet un prolongement continu en zéro puisque

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x \sin x}{x(a^2+x^2)} = \frac{1}{a^2}.$$

Elle est donc intégrable en 0. En outre, puisque son module est majoré sur $]0, +\infty[$ par $\frac{1}{x(a^2+x^2)}$ qui est intégrable à l'infini, l'intégrale demandée est donc bien définie. En outre, puisque les fonctions

$$x \mapsto \frac{\cos x \sin x}{x(a^2+x^2)}$$

et

$$x \mapsto \frac{e^{ix}\sin x}{x(a^2+x^2)}$$

sont intégrables sur $\mathbb{R}$, la parité de l'intégrand donne

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\cos x \sin x}{x(a^2+x^2)}\,dx = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \frac{\cos x \sin x}{x(a^2+x^2)}\,dx = \frac{1}{2}\Re \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{ix}\sin x}{x(a^2+x^2)}\,dx.$$

On obtient donc

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2}\Re\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{ix}\sin x}{x(a^2+x^2)}\,dx = \frac{1}{8a}\int_{\mathbb{R}} \left(\mathcal{F}_x^+ g\right)\overline{\left(\mathcal{F}_x^+ f\right)}\,dx \\ &= \frac{\pi}{4a}\int_{\mathbb{R}} g(x)\,\overline{f(x)}\,dx = \frac{\pi}{4a}\int_{-1}^{1} e^{-a(1-x)}\,dx \\ &= \frac{\pi e^{-a}}{2a^2}\sinh a \end{aligned}$$

où la troisième égalité a été obtenue en vertu de la formule de Parseval, applicable dans ce cas puisque f et g sont intégrables sur $\mathbb{R}$.

En remarquant que I est pair par rapport à a, on obtient finalement que

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\cos x \sin x}{x(a^2+x^2)}\,dx = \frac{\pi e^{-|a|}}{2a^2}\sinh|a|$$

pour tout $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

Question 2. Montrons que $f = (2\pi)^{-1}\mathbb{F}^-\mathcal{F}^+ f$ presque partout sur $\mathbb{R}$. Fixons $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Étant donné que φ est continu à support compact dans $\mathbb{R}$, on sait que $\varphi \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ et donc que $\mathbb{F}^-\varphi = \mathcal{F}^-\varphi$. Le théorème de transfert dans L^2 donne que

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\;\mathbb{F}_x^-\mathcal{F}^+ f\,dx = \int_{\mathbb{R}} \left(\mathbb{F}_x^-\varphi\right)\;\left(\mathcal{F}_x^+ f\right)\;dx = \int_{\mathbb{R}} \left(\mathcal{F}_x^-\varphi\right)\;\left(\mathcal{F}_x^+ f\right)\;dx$$

et puisque $\mathcal{F}^-\varphi \in L^1(\mathbb{R})$, on obtient en appliquant le théorème du transfert dans $L^1(\mathbb{R})$:

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\;\mathbb{F}_x^-\mathcal{F}^+ f\,dx = \int_{\mathbb{R}} \left(\mathcal{F}_x^+\mathcal{F}^-\varphi\right)\;f(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\;2\pi f(x)\,dx$$

en vertu du théorème de Fourier dans L^1. On a donc établi que

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\;\mathbb{F}_x^-\mathcal{F}^+ f\,dx = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\;2\pi f(x)\,dx$$

pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Par conséquent, on tire que

$$\mathbb{F}^-\mathcal{F}^+ f = 2\pi f$$

presque partout dans $\mathbb{R}$, d'où

$$f = \frac{1}{(2\pi)}\mathbb{F}^-\mathcal{F}^+ f \in L^2(\mathbb{R}).$$

Question 3. 3.1) La fonction f donnée dans l'énoncé appartient à $L^2(]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[)$ car son carré est continu sur le compact $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ et y est donc intégrable. Puisque la fonction f est paire, on obtient

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} |\sin x|\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} |\sin x|\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \sin x\,dx = \frac{2}{\pi},$$

et

$$b_m = \frac{2}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} |\sin x|\,\sin(2mx)\,dx = 0$$

pour tout entier $m \in \mathbb{N}_0$. De plus, pour $m \in \mathbb{N}_0$, on trouve que

$$a_m = \frac{2}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} |\sin x|\,\cos(2mx)\,dx = \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2} \sin x\,\cos(2mx)\,dx = \frac{4}{\pi}\,\frac{1}{1-4m^2}.$$

Par conséquent, on sait que l'égalité

$$|\sin x| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{4m^2-1}\,\cos(2mx) \tag{1}$$

a lieu dans $L^2(]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[)$ et presque partout dans $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$.

3.2) Étant donné que la série

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{4m^2-1}\,\cos(2mx)$$

converge uniformément sur $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$, la fonction

$$x \mapsto \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{4m^2-1}\,\cos(2mx)$$

est continue sur $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$. Par conséquent, l'égalité (1) a lieu partout sur $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ et même en $x=\pm\frac{\pi}{2}$ par passage à la limite.

En prenant $x=0$ dans (1), on obtient que

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{4m^2-1} = \frac{1}{2}$$

et en prenant $x=\pi/2$, on obtient que

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{4m^2-1} = \frac{2-\pi}{4}.$$

3.3) Le premier terme du développement obtenu en (1) s'écrit

$$\frac{2}{\pi} - \frac{4}{3\pi}\cos(2x).$$

Il s'agit donc d'une fonction paire, non nulle en $x=0$. Parmi les graphiques proposés, c'est donc le premier qui représente les premiers termes du développement en série trigonométrique de Fourier de f.