

Répétition du cours d'Analyse III, 2e partie
3ème BM
11 Février 2010

1. Pour quelles valeurs du paramètre réel r la fonction f définie par

$$f(x) = (1-x)^r \ln(x)$$

est-elle intégrable sur $]0, 1[$?

2. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Examiner la convergence dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ de la suite φ_m ($m \in \mathbb{N}_0$) définie par

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad \varphi_m(x) &= \frac{\varphi(x)}{m}; & \text{(b)} \quad \varphi_m(x) &= \frac{\varphi(x/m)}{m}; \\ \text{(c)} \quad \varphi_m(x) &= m\varphi(mx); & \text{(d)} \quad \varphi_m(x) &= m\varphi(x/m); \\ \text{(e)} \quad \varphi_m(x) &= \frac{\varphi(mx)}{m}. \end{aligned}$$

3. Parmi les applications suivantes, quelles sont celles qui définissent des distributions dans \mathbb{R} ? En déterminer alors le support.

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) &\mapsto D\varphi(1); & \text{(b)} \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) &\mapsto (\varphi(0))^2; \\ \text{(c)} \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) &\mapsto \varphi(0) + D\varphi(1); & \text{(d)} \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) &\mapsto \int_0^1 \varphi(x) dx; \\ \text{(e)} \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) &\mapsto \int_0^1 |\varphi(x)| dx; & \text{(f)} \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) &\mapsto \sum_{n=0}^N (D^n \varphi)(0); \\ \text{(g)} \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) &\mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \varphi(n); & \text{(h)} \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) &\mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} (D^n \varphi)(0); \\ \text{(i)} \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) &\mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} (D^n \varphi)(n); & \text{(j)} \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) &\mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \varphi(1/n); \\ \text{(k)} \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) &\mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \varphi(1/n); & \text{(l)} \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) &\mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \varphi(1/n). \end{aligned}$$

4. Soit $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ (où Ω est un ouvert de \mathbb{R}^n). Démontrer que f est égal à 0 presque partout si et seulement si

$$\int_{\Omega} f(x)\varphi(x) dx = 0 \text{ pour tout } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$