ANALYSE III, 2007-2008

Exercices–semaines des 11 et 18 février 2008

$\boxed{\text{TD 1}}$

Les réponses aux questions ci-dessous doivent être justifiées.

1. On donne $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. On définit ensuite la suite φ_m $(m \in \mathbb{N}_0)$ par

$$\varphi_m(x) = \frac{\varphi(x)}{m}$$

$$\left(\text{resp.} \quad \varphi_m(x) = \frac{\varphi(x/m)}{m}, \quad \varphi(x) = m\varphi(mx), \quad \varphi(x) = m\varphi(x/m), \quad \varphi(x) = \frac{\varphi(mx)}{m}\right).$$

   Examiner la convergence dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ de cette suite φ_m.

2. Parmi les applications suivantes, quelles sont celles qui définissent des distributions dans $\mathbb{R}$? En déterminer alors le support[3].

$$\begin{array}{ll}
\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \mapsto D\varphi(1) & \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \mapsto \varphi(0) + D\varphi(1) \\
\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \mapsto \int_0^1 \varphi(x)\, dx & \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \mapsto \int_0^1 |\varphi(x)|\, dx \\
\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \mapsto \sum_{n=0}^{N} (D^n\varphi)(0) & \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \varphi(n) \\
\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} (D^n\varphi)(0) & \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} (D^n\varphi)(n) \\
\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \varphi(\frac{1}{n}) & \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}\varphi(\frac{1}{n})
\end{array}$$

3. On considère les fonctions

$$f_m(x) = \begin{cases} e^{-x/m} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

   - Esquisser f_1, f_2, f_3
   - Pour m fixé, a-t-on $f_m \in L^1(\mathbb{R})$? (resp. $L^2(\mathbb{R})$? la fonction f_m définit-elle une distribution?)
   - La limite $\lim_{m\to+\infty} f_m$ existe-t-elle au sens ponctuel (pp)? (resp. dans $L^1(\mathbb{R})$, $L^2(\mathbb{R})$, au sens distribution?)

4. Déterminer la dérivée seconde de la distribution associée à la fonction $|x|$, $x \in \mathbb{R}$ (même question pour $\sin(2x)\chi_{]0,+\infty[}(x)$, $x \in \mathbb{R}$).

5. On se place dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Déterminer la distribution suivante (simplifier au maximum l'expression)

$$e^x D\delta_0 + e^x \delta_0 + (\cos x) D\delta_0$$

6. On se place dans $\mathbb{R}$. On pose

$$\Pi(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } |x| \geq \frac{1}{2} \\ 1 & \text{si } |x| < \frac{1}{2} \end{cases}, \quad \rho_k(x) = k\Pi(kx), \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

   Si, pour tout k, u_k désigne la distribution dans $\mathbb{R}$ associée à ρ_k, montrer que

$$\lim_{k\to+\infty} u_k(\varphi) = \delta_0(\varphi), \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

7. On pose

$$u(\varphi) = -\lim_{\varepsilon\to 0^+} \left(\int_{|x|\geq\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x^2} dx \;-\; 2\frac{\varphi(0)}{\varepsilon} \right), \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

   Montrer que u définit une distribution dans $\mathbb{R}$ et que, si $f(x) = \ln|x|$, on a

$$u = D^2 u_f$$

---

[3] quand cela aura été vu au cours, c'est-à-dire pour le TD suivant