Répétition du cours d'Analyse III, 2e partie
3ème BM
25 Février 2010

1. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Démontrer que la distribution de Dirac dans Ω n'est pas une distribution associée à une fonction localement intégrable sur Ω.

2. Déterminer la dérivée seconde de la distribution associée à la fonction $|x|$, $x \in \mathbb{R}$ (même question pour $\sin(2x)\chi_{]0,+\infty[}(x)$, $x \in \mathbb{R}$).

3. On se place dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Déterminer la distribution suivante (simplifier au maximum l'expression)
$$e^x D\delta_0 + e^x\delta_0 + (\cos(x))D\delta_0.$$

4. On se place dans $\mathbb{R}$. On pose
$$\Pi(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } |x| \geq \frac{1}{2} \\ 1 & \text{si } |x| < \frac{1}{2} \end{cases}$$
et
$$\rho_k(x) = k\Pi(kx),\ k \in \mathbb{N}_0.$$
Si, pour tout k, u_k désigne la distribution dans $\mathbb{R}$ associée à ρ_k, montrer que
$$\lim_{k\to+\infty} u_k(\varphi) = \delta_0(\varphi), \forall\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

5. Pour tout $\varepsilon > 0$, soit
$$u_\varepsilon = \frac{\delta_\varepsilon - \delta_{-\varepsilon}}{2\varepsilon}.$$
Montrer que l'application u définie par
$$u(\varphi) = \lim_{\varepsilon\to 0} u_\varepsilon(\varphi), \forall\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$$
est une distribution et la déterminer. Cette distribution u est-elle une distribution associée à une fonction localement intégrable ? Pourquoi ?

6. Si $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et $f \in C_\infty(\Omega)$, démontrer que $[fu] \subseteq [u] \cap [f]$.