ANALYSE III, 2007-2008

Exercices–semaine du 25 février 2008

TD 2

Les réponses aux questions ci-dessous doivent être justifiées.

1. Soit
$$f_m(x) = \frac{\sin(mx)}{x} \quad (m \in \mathbb{N}_0)$$
et soit u_m la distribution associée à f_m. Etudier la convergence de cette suite u_m dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$

2. Soient les fonctionnelles définies par
$$\varphi \mapsto \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} e^{2i\pi mx}\varphi(x)dx, \qquad \varphi \mapsto \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \varphi(m)$$
et notée respectivement
$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{2i\pi mx}, \qquad \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta_m.$$
Montrer que
$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{2i\pi mx} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta_m$$
dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

3. Résoudre dans $D'(\mathbb{R})$ (Y désigne la fonction caractéristique de $[0, +\infty[$):
$$Du = u_Y, \quad xDu = u_Y, \quad xDu = \delta_0, \quad Du = vp(1/x), \quad xu = u, \quad x^2u = u.$$

4. Si m est un naturel strictement positif et Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, on définit l'espace de Sobolev $H^m(\Omega)$ comme étant l'ensemble des élements u de $\mathcal{D}'(\Omega)$ dont les dérivées $D^k u$ $(k = 0, \ldots, m)$ sont des distributions associées à des fonctions de $L^2(\Omega)$.

   On considère $\Omega =]-1, 1[$ et la distribution u associée à la fonction $f(x) = \frac{x+|x|}{2}$. Quel est le plus grand naturel m tel que $u \in H^m(\Omega)$?